

*Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven.*

*Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.*

**Opgave 1.** Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a)  $p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p$  (4 punten)
- (b)  $\neg p \vee (p \rightarrow r), p \vdash r$  (4 punten)
- (c)  $r \rightarrow q, \neg(p \vee q) \vdash \neg r$  (4 punten)

**Opgave 2.**

- (a) Geef het op het college en in het boek gegeven criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Transformeer de formule  $(\neg p \rightarrow (q \wedge p)) \rightarrow p$  naar een CNV. Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (6 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (2 punten)

**Opgave 3.**

- (a) Gegeven is de boolse functie  $h(x, y, z)$  van drie variabelen  $x, y, z$  die 1 is als de variabelen  $x$  en  $y$  een verschillende waarde hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor  $h$  met variabelen ordening  $[x, y, z]$ . (6 punten)
- (b) Verder is gegeven de boolse functie  $g(z, w) = z + \bar{w}$ . Bepaal een OBDD van de functie  $g(z, w)$  met variabelen ordening  $[z, w]$ . (4 punten)
- (c) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie  $h(x, y, z) \cdot g(z, w)$ , met variabelen ordening  $[x, y, z, w]$ . Maak daarbij gebruik van (a) en (b). (4 punten)

**Opgave 4.** Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a)  $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x(Px \vee \exists y Rxy)$  (6 punten)
- (b)  $\exists x \forall y \neg Rxy \vdash \neg \forall x Rxx$  (6 punten)

**Opgave 5.** De volgende gevolgtrekking is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx) \models \exists x \forall y Rxy$$

(8 punten)

**Opgave 6.** Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Zxy: x is een zuster van y

Oxy: x is ouder dan y

a: Anja

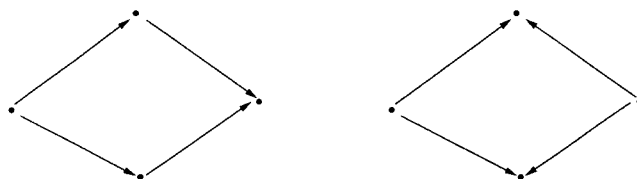
b: Bert

(a) Bert heeft geen zusters. (4 punten)

(b) Anja is de enige zuster van Bert. (4 punten)

(c) Bert heeft twee zusters, de ene is ouder dan hij en de andere jonger. (4 punten)

**Opgave 7.** We gebruiken een tweeplaatsig predikaatsymbool  $R$ . We beschouwen twee modellen, weergegeven door de volgende plaatjes ( $Rxy$  geldt als er een pijl loopt van  $x$  naar  $y$ ).



Geef voor zowel het linker als het rechter plaatje aan welke van de volgende zes formules waar zijn.

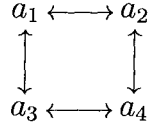
- (i)  $\exists x \forall y Rxy$
- (ii)  $\exists x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow y = z)$
- (iii)  $\forall y \exists x Rxy$
- (iv)  $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow y = z)$
- (v)  $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow Rxz)$
- (vi)  $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall w (Rwx \rightarrow Rwy))$

(6 punten)

**Opgave 8.** Gegeven is het frame  $\mathcal{F} = (W, R)$  met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_4), (a_4, a_3)\} \end{aligned}$$

Het frame  $\mathcal{F}$  is getekend in het volgende plaatje.



Op  $\mathcal{F}$  definiëren we het Kripke-model  $\mathcal{M}$  met de labeling functie:

$$L(a_1) = \emptyset, \quad L(a_2) = \{p\}, \quad L(a_3) = \{q\}, \quad L(a_4) = \{p\}$$

- (a) Ga na voor welke werelden  $a_i$  geldt:  $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Diamond(p \vee q)$ . (4 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden  $a_i$  geldt:  $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box\Box p$ . (4 punten)
- (c) Ga na voor welke werelden  $a_i$  geldt:  $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box\Box q$ . (4 punten)
- (d) Bestaat er een labelingfunctie  $L'$  op het frame  $\mathcal{F}$ , zodanig dat voor het Kripke-model  $\mathcal{M}' = (W, R, L')$  geldt:  $\mathcal{M}' \not\models p \vee q \rightarrow \Box\Diamond(p \vee q)$ ? Motiveer uw antwoord. (4 punten)