

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$ (4 punten)
- (b) $\neg(p \rightarrow q) \vdash \neg q$ (4 punten)
- (c) $\neg(p \vee q) \vdash p \rightarrow r$ (4 punten)

Opgave 2. Gegeven is dat de formule φ een tautologie is en ψ een contingentie. Geef voor elk van de volgende formules aan of het een tautologie, een contradictie of een contingentie is, of dat je dat niet weet. (Alleen het antwoord volstaat.) (6 punten)

- (a) $\psi \rightarrow \varphi$
- (b) $\varphi \rightarrow \psi$
- (c) $\psi \rightarrow \neg\varphi$

Opgave 3.

- (a) Gegeven is de boolse functie $h(x, y, z)$ van drie variabelen x, y, z die 1 is als de variabelen x en z dezelfde waarde hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor h met variabelen ordening $[x, y, z]$. Doe dit met behulp van de regels C1-3 vanuit een BDT voor h . (6 punten)
- (b) Verder is gegeven de boolse functie $g(y, w) = \bar{y} \cdot w$. Bepaal een OBDD van de functie $g(y, w)$ met variabelen ordening $[y, w]$. (4 punten)
- (c) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $h(x, y, z) + g(y, w)$, met variabelen ordening $[x, z, y, w]$. Maak daarbij gebruik van (a) en (b). (4 punten)

Opgave 4. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\neg\exists x(Px \vee Qx) \vdash \forall x\neg Px$ (6 punten)
- (b) $\forall x(Px \rightarrow \forall yRyx) \vdash \neg\exists x(Px \wedge \neg Rxx)$ (6 punten)

Opgave 5. De twee onderstaande gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Specificeer voor beide gevallen een tegenmodel waaruit dat blijkt (d.w.z., een model waarin de premisse waar is, maar de conclusie niet).

$$(a) \neg \exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx) \quad (6 \text{ punten})$$

$$(b) \forall x \forall y (\neg Rxy \rightarrow Ryx) \models \exists x \forall y Rxy \quad (6 \text{ punten})$$

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

$\forall xy$: x vindt y aardig

Kxy : x kent y

Zxy : x is een zuster van y

b : Bert

(a) Wie iedereen aardig vindt, kent zichzelf niet.

(4 punten)

(b) Bert heeft precies twee zusters.

(4 punten)

(b) De zusters van Bert worden door iedereen aardig gevonden, behalve door Bert zelf.

(4 punten)

Opgave 7. We bekijken in de predikatenlogica formules met één tweeplaatsig predikaatsymbool R . Gegeven zijn twee modellen:

– Het model $\mathcal{N}$ heeft als domein de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, en $R^{\mathcal{N}}$ is de relatie $\leq$ (kleiner of gelijk) op $\mathbb{N}$.

– Het model $\mathcal{Z}$ heeft als domein de gehele getallen $\mathbb{Z}$, en $R^{\mathcal{Z}}$ is de relatie $\leq$ (kleiner of gelijk) op $\mathbb{Z}$.

(a) Geef een formule φ zodat $\mathcal{Z} \models \varphi$, maar $\mathcal{N} \not\models \varphi$ (d.w.z. φ is waar in $\mathcal{Z}$, maar niet in $\mathcal{N}$).

(b) Geef een consistente formule ψ zodat $\mathcal{Z} \not\models \psi$ en $\mathcal{N} \not\models \psi$ (d.w.z. ψ is noch waar in $\mathcal{Z}$, noch in $\mathcal{N}$).

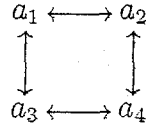
(c) Geef een model waarin de zojuist gevonden formule ψ wel waar is.

(6 punten)

Opgave 8. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_4), (a_4, a_3), \} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.



Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_1) = \{p\}, L(a_2) = \{p\}, L(a_3) = \{p\}, L(a_4) = \{p, q\}$$

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash p \rightarrow \Diamond q$. (4 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box \Diamond q$. (4 punten)
- (c) Geldt $\mathcal{M} \models q \rightarrow \Box \Diamond q$? Motiveer uw antwoord. (4 punten)
- (d) Met welke frame-eigenschap correspondeert de formule $\phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$? Druk deze eigenschap uit in een predikaatlogische formule. (4 punten)