

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $p \wedge (q \rightarrow r) \vdash q \rightarrow (p \wedge r)$ (4 punten)
- (b) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p$ (4 punten)
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r, \neg p \vee q \vdash r$ (4 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef het op het college en in het boek gegeven criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Transformeer de formule $\neg p \rightarrow \neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ naar een CNV. Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (6 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (2 punten)

Opgave 3.

- (a) Gegeven is de boolse functie $h(x, y, z)$ van drie variabelen x, y, z die 1 is als de variabelen x en y een verschillende waarde hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor h met variabelen ordening $[x, y, z]$. Doe dit met behulp van de regels C1–3 vanuit een BDT voor h . (6 punten)
- (b) Verder is gegeven de boolse functie $g(y, w) = y \cdot \bar{w}$. Bepaal een OBDD van de functie $g(y, w)$ met variabelen ordening $[y, w]$. (4 punten)
- (c) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $h(x, y, z) \cdot g(y, w)$, met variabelen ordening $[x, z, y, w]$. Maak daarbij gebruik van (a) en (b). (4 punten)

Opgave 4. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

$$(a) \neg\forall x(Px \wedge Qx), \forall xQx \vdash \neg\forall xPx \quad (6 \text{ punten})$$

$$(b) \forall x(Rxx \rightarrow Qx), \exists y\forall xRxy \vdash \exists xQx \quad (6 \text{ punten})$$

Opgave 5. De volgende gevolgtrekking is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\forall x\forall y (Rxy \vee Ryx) \models \exists x\forall y Rxy$$

(8 punten)

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Vxy : x is vriend van y

Zxy : x is een zuster van y

a : Anja

b : Bert

c : Cora

(a) Alle vrienden van Bert's zusters zijn ook vrienden van Bert.

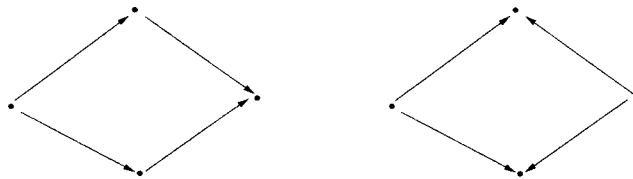
(5 punten)

(b) Anja en Cora zijn zusters van Bert, en daarnaast heeft Bert nog één zuster.

(5 punten)

Opgave 7. We gebruiken een tweeplaatsig predikaatsymbool R .

(a) We beschouwen twee modellen, weergegeven door de volgende plaatjes (Rxy geldt als er een pijl loopt van x naar y).



Geef een formule die waar is in het linkerplaatje, maar niet in het rechter.

(4 punten)

(b) We nu beschouwen twee andere modellen:

- Het model $\mathcal{N}$ heeft als domein de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, en $R^{\mathcal{N}}$ is de relatie $\leq$ (kleiner of gelijk) op $\mathbb{N}$.
- Het model $\mathcal{Z}$ heeft als domein de gehele getallen $\mathbb{Z}$, en $R^{\mathcal{Z}}$ is de relatie $\leq$ (kleiner of gelijk) op $\mathbb{Z}$.

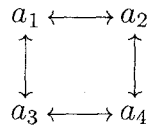
Geef voor beide modellen aan welke van de volgende zes formules waar zijn.

- (i) $\exists x \forall y Rxy$
 - (ii) $\forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$
 - (iii) $\forall y \exists x Rxy$
 - (iv) $\exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx)$
 - (v) $\exists y \forall x Rxy$
 - (vi) $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall w (Rwy \rightarrow (w = x \vee w = y)))$
- (8 punten)

Opgave 8. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_4), (a_4, a_3), \} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.



Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_1) = \emptyset, L(a_2) = \{p\}, L(a_3) = \{p, q\}, L(a_4) = \{q\}$$

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Diamond(p \wedge q)$. (4 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box \Diamond(p \wedge q)$. (4 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models (p \wedge q) \rightarrow \Box \Diamond(p \wedge q)$? Motiveer uw antwoord. (4 punten)