



Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash q \vee r$, (4 punten)
- (b) $p \rightarrow (q \wedge r), \neg q \vdash \neg p$. (4 punten)
- (c) $p, \neg q \vdash \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$. (4 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef het op het college en in het boek gegeven criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Transformeer de formule $((q \wedge \neg r) \rightarrow (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \rightarrow \neg(r \wedge p))$ naar een CNV. Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (6 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (2 punten)

Opgave 3.

- (a) Gegeven is de boolse functie $h(x, y, z)$ van drie variabelen x, y, z die 1 is als de variabelen x en z dezelfde waarde hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor h met variabelen ordening $[x, y, z]$. Doe dit met behulp van de regels C1-3 vanuit een BDT voor h . (6 punten)
- (b) Verder is gegeven de boolse functie $g(y, w) = y + \bar{w}$. Bepaal een OBDD van de functie $g(y, w)$ met variabelen ordening $[y, w]$. (4 punten)
- (c) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $f(x, y, z) + g(y, w)$, met variabelen ordening $[x, z, y, w]$. Maak daarbij gebruik van (a) en (b). (4 punten)

Opgave 4. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $\forall x \forall y (\neg Rxy \rightarrow Ryx) \vdash \forall x Rxx$ (5 punten)

(b) $\exists x \forall y Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$ (5 punten)

Opgave 5. De volgende gevolgtrekking is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\forall x \forall y (\neg Rxy \rightarrow Ryx) \models \exists x \forall y Rxy.$$

(6 punten)

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Bx: x is een boek
Uxyz: x leent y uit aan z
Lxy: x heeft y gelezen
Zxy: x is een zuster van y
a: Anna
c: Chris

(a) Anna leent een boek dat ze nog niet heeft gelezen uit aan Chris.

(4 punten)

(b) Chris leent aan al zijn zusters boeken uit, behalve aan Anna.

(4 punten)

(c) Chris heeft meer dan twee boeken gelezen.

(4 punten)

Opgave 7. We gebruiken een tweepaatsig predikaatsymbool R . Het model $\mathcal{N}$ heeft als domein de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, en $R^{\mathcal{N}}$ is de relatie $<$ (kleiner dan) op $\mathbb{N}$.

(a) Wanneer heet een stel predikaatlogische formules φ, ψ consistent?

(2 punten)

(b) Geef consistent stel formules φ, ψ , zodat $\mathcal{N} \models \varphi$, maar $\mathcal{N} \not\models \psi$.

(4 punten)

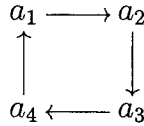
(c) Geef een model $\mathcal{M}$ zodat voor de in (b) gevonden formules φ, ψ zowel $\mathcal{M} \models \varphi$ als $\mathcal{M} \models \psi$ gelden.

(4 punten)

Opgave 8. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_1)\} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.



Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_2) = L(a_3) = \emptyset, \quad L(a_1) = \{p\}, \quad L(a_4) = \{p, q\}$$

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Diamond(p \vee q)$. (4 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box(p \vee q)$. (4 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond p \rightarrow \Box(p \vee q)$? Motiveer uw antwoord. (4 punten)
- (d) Met welke frame-eigenschap correspondeert de formule $\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\phi$? Druk deze eigenschap uit in een predikaatlogische formule. (4 punten)