

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $p \rightarrow r, q \rightarrow \neg r \vdash p \rightarrow \neg q$, (5 punten)

(b) $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$. (5 punten)

Opgave 2.

(a) Geef het criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)

(b) Bepaal een CNV voor de formule $\neg(p \rightarrow (\neg q \vee r)) \vee \neg(\neg(r \wedge p) \rightarrow q)$. Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)

(c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (4 punten)

Opgave 3. Bewijs of weerleg de volgende bewering (voor de propositielogica).

Als $\phi \models \neg\psi \rightarrow \chi$ en $\phi \not\models \psi$, dan $\phi \models \chi$.

(5 punten)

Opgave 4. Gegeven is de boolse functie

$$f(x, y, z) = y + \bar{z} \cdot x + z \cdot \bar{y} + y \cdot x$$

(a) Bepaal de waarheidstafel van de functie f . (3 punten)

(b) Bepaal een BDT (binary decision tree) van f t.o.v. de ordening $[x, y, z]$. (4 punten)

(c) Bepaal de gereduceerde OBDD van f met variabelen ordening $[x, y, z]$, met gebruikmaking van de regels C1-3. Vermeld alle C1-3 stappen. (4 punten)



- (d) Geef nu direct de gereduceerde OBDD van f , met variabelen ordening $[z, y, x]$. U hoeft hierbij niet de regels C1-3 te gebruiken. Is uw antwoord het enig juiste? Waarom?

(4 punten)

Opgave 5. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

$$(a) \exists x \forall y (Rxy \vee Ryx) \vdash \exists z Rzz, \quad (5 \text{ punten})$$

$$(b) \forall x (\exists y Rxy \rightarrow Rxa) \vdash \forall z (\neg Rza \rightarrow \neg Rzz). \quad (5 \text{ punten})$$

Opgave 6. De volgende gevolgtrekking is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\forall x \exists y \exists z (Rxy \wedge Rxz \wedge y \neq z), \forall x \neg Rxx \models \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx).$$

(6 punten)

Opgave 7. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Bx: x is een boek
 Uxyz: x leent y uit aan z
 (of: x heeft y aan z uitgeleend)
 Lxy: x heeft y gelezen
 Rxy: x is broer van y
 Zxy: x is zuster van y
 a: Anna
 c: Chris

- (a) Anna heeft alle boeken die Chris aan haar heeft uitgeleend gelezen.

(5 punten)

- (b) Chris leent alleen boeken uit aan zijn broers en zusters.

(5 punten)

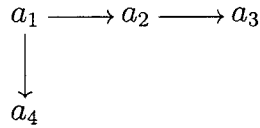
- (c) Wie een boek niet heeft gelezen, leent het niet uit.

(5 punten)

Opgave 8. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_4)\} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.



Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_1) = L(a_2) = \emptyset, \quad L(a_3) = L(a_4) = \{p\}.$$

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \models \Box p$.
(3 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \models \Box p \rightarrow \Box \Box p$.
(3 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Box p \rightarrow \Box \Box p$? Motiveer uw antwoord.
(4 punten)
- (d) Met welke frame-eigenschap correspondeert de formule $\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$? Druk deze eigenschap uit in een predikaatlogische formule.
(3 punten)

Opgave 9. Bedenk zelf twee instanties van het Post correspondence problem (PCP), de ene niet oplosbaar, de tweede wel (geef er ook een oplossing bij).

(6 punten)