

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\neg(p \vee q), r \vdash \neg(r \rightarrow p),$ (5 punten)
- (b) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r.$ (5 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef het criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Bepaal een CNV voor de formule $(p \rightarrow p) \wedge (\neg(r \rightarrow (p \vee \neg q)) \rightarrow \neg(r \wedge p)).$ Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (4 punten)

Opgave 3. Bewijs of weerleg de volgende bewering (voor de propositielogica).

Als $\phi \models \psi$ en ϕ is een tautologie (dwz een geldige formule), dan is ook ψ een tautologie.

(5 punten)

Opgave 4. Gegeven is de boolse functie $f(x, y)$ die 1 is als precies één van de variabelen x, y de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

Verder is gegeven de boolse functie $g(z, w)$ die 1 is als precies één van de variabelen z, w de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[z, w]$. (5 punten)

- (b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $f(x, y) \cdot g(z, w)$, met variabelen ordening $[x, y, z, w]$. (Hint: gebruik rechtstreeks onderdeel (a), en gebruik niet de regels C1-3.)
(5 punten)
- (c) Gegeven is de boolse functie $h(x, y, z)$ van drie variabelen x, y, z die 1 is als precies één van de variabelen de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor h met variabelen ordening $[x, y, z]$. Doe dit met behulp van de regels C1-3 vanuit een BDT voor h .
(5 punten)

Opgave 5. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\neg\forall x\exists yRxy \vdash \neg\forall xRxx$, (5 punten)
- (b) $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx), \exists y\neg Qy \vdash \exists yPy$. (5 punten)

Opgave 6. De volgende gevolgtrekking is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\exists x\forall yRxy, \forall xRxx \models \forall x\forall y(Rxy \vee Ryx).$$

(6 punten)

Opgave 7. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

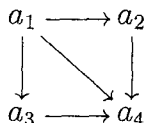
Cx: x is een chauffeur
Ax: x is een bus
Bxy: x bestuurt y
Rx: x rijdt
Sx: x staakt

- (a) Elke niet stakende chauffeur bestuurt een bus.
(4 punten)
- (b) Als hoogstens één chauffeur staakt, dan rijden alle bussen.
(4 punten)
- (c) Een bus rijdt alleen als deze door tenminste twee chauffeurs wordt bestuurd.
(4 punten)

Opgave 8. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.



Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_1) = L(a_2) = L(a_3) = \emptyset, L(a_4) = \{p\}.$$

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Diamond p$.
(3 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Diamond \Diamond p$.
(3 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$? Motiveer uw antwoord. (4 punten)
- (d) Met welke frame-eigenschap correspondeert de formule $\Box \phi \rightarrow \Diamond \phi$? Druk deze eigenschap uit in een predikaatlogische formule.
(4 punten)

Opgave 9.

- (a) Beschouw de volgende instantie van het Post correspondance problem (PCP). Geef een oplossing, als die er is, of beredeneer dat er geen oplossing is.

$$((00, 01), (0111, 1), (1, 11), (111, 1100))$$

(4 punten)

- (b) Bestaat er een algoritme dat voor een willekeurige formule ϕ uit de predikatenlogica beslist of $\models \phi$? Licht uw antwoord kort toe.
(4 punten)