



Opgave 1 (5+10 ptn.) We beschouwen het volgende formele systeem. De taal bestaat uit alle strengen over het alfabet $\{\square, \diamond, \triangle\}$; Het enige axioma is de streng $\square\square\triangle\diamond\diamond$, en de regels zijn als volgt:

R1 als $x\square\triangle y$ een stelling is, dan ook $x\triangle yy$,

R2 als x een stelling is, dan ook $\square x$,

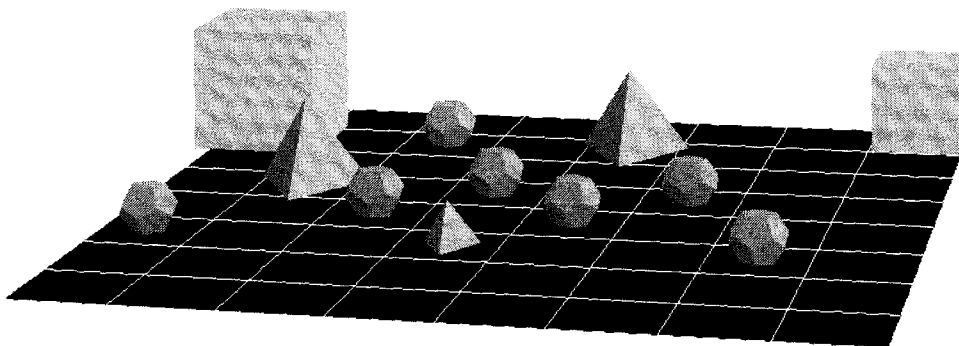
(Hierbij staan x, y als gebruikelijk voor willekeurige strengen. Vergeet niet dat de regels ook mogen worden toegepast als we x en/of y instantiëren met de *lege* streng!)

- Geef alle strengen die je in hoogstens drie stappen kunt afleiden.
- Bewijs dat de streng $\square\square\square\triangle\diamond\diamond\diamond\diamond$ geen stelling van dit formele systeem is.

Opgave 2 (4+5+4 ptn.)

- Geef de waarheidstafel voor de formule $p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$.
- Zet vervolgens deze formule om in een disjunctieve normaalvorm.
- Geef twee formules φ, ψ , zodanig dat de formules $\varphi \vee \psi$ en $\neg(\varphi \wedge \psi)$ beide tautologieën zijn.

Opgave 3 (12 ptn.) Beschouw in Tarski's World het model dat gegeven is in de volgende figuur. We veronderstellen bekendheid met de taal en de terminologie van Tarski's World.



Geef voor elk van de volgende formules aan of ze waar zijn in het gegeven model. (Motivering niet nodig.)

- $\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \vee \text{Tet}(y)) \rightarrow (\text{FrontOf}(x, y) \vee \text{FrontOf}(y, x)))$
- $\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Tet}(y)) \rightarrow (\text{LeftOf}(x, y) \vee \text{LeftOf}(y, x)))$
- $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y \text{Larger}(x, y))$
- $\forall x ((\text{Tet}(x) \wedge \text{Small}(x)) \rightarrow \neg \exists y \text{FrontOf}(y, x))$
- $\exists x \exists y \exists z (\text{Dodec}(x) \wedge \text{Dodec}(y) \wedge \text{Dodec}(z) \wedge \forall w (\text{Dodec}(w) \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$
- $\exists x \exists y \exists z (\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y) \wedge \text{Cube}(z) \wedge \forall w (\text{Cube}(w) \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$
- $\exists x \exists y \exists z (\text{Tet}(x) \wedge \text{Tet}(y) \wedge \text{Tet}(z) \wedge \forall w (\text{Tet}(w) \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$

Opgave 4 (5+5+5 ptn.)

Gegeven is een predikaatlogische taal met daarin één constante a , twee éénplaatsige predikaatsymbolen M, H en twee tweepplaatsige predikaatsymbolen B, W . We interpretern deze taal in een domein van mensen en gebouwen, waarbij de vertaalsleutel als volgt is:

a	Anna
Mx	x is een mens
Hx	x is een huis
Bxy	x bezit y
Wxy	x woont in y

Geef nu de predikaatlogische vertaling van de volgende zinnen:

- Anna bezit precies twee huizen.
- Er zijn mensen die een huis bezitten waar ze niet in wonen.
- Als twee mensen samen een huis bezitten, dan wonen ze allebei in dat huis.

Opgave 5 (5+5+5 ptn.)

Geef natuurlijke deductie afleidingen voor:

- $\forall x Rxx \vdash \forall x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$;
- $p \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash \neg q \rightarrow \neg p$;
- $\exists x \neg Px \vdash \neg \forall y Py$.

Opgave 6 (10 ptn.)

De onderstaande gevolgtrekking is ongeldig. Specificeer een tegenmodel waaruit dat blijkt.

$$\forall x \exists y (Rxy \wedge x \neq y), \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \models \exists x Rxx.$$

Opgave 7 (5+5 ptn.)

- Geef de correctheidsstelling van de propositiologica.
- We noemen een verzameling formules Σ *vervulbaar* als er een waardering V is die een model is voor Σ .

Toon aan dat elke vervulbare verzameling formules consistent is.

Het tentamencijfer is gelijk aan 1 plus het tiende deel van het behaalde aantal punten. Bij opgave 3 kost elk fout antwoord 4 punten.