

Opgave 1 (5+10 ptn.) We beschouwen het volgende formele systeem. De taal bestaat uit alle strengen over het alfabet $\{\square, \diamond, \triangle\}$; Het enige axioma is de streng $\triangle\square\diamond$, en de regels zijn als volgt:

R1 als $x\triangle y\diamond z$ een stelling is, dan ook $x\triangle yy\diamond z$,

R2 als $x\triangle\square y$ een stelling is, dan ook $x\square\triangle y$,

R3 als $x\square\diamond y$ een stelling is, dan ook $x\diamond\square y$.

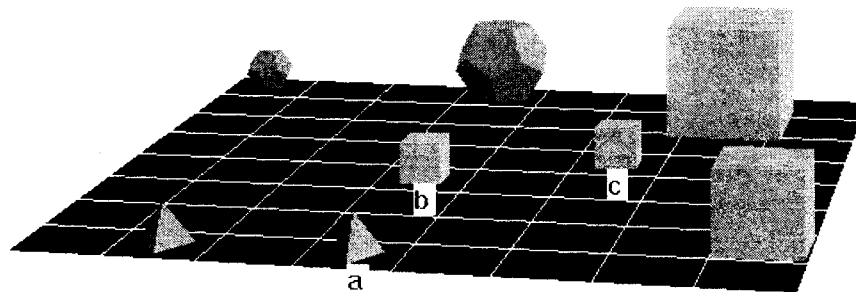
(Hierbij staan x , y en z als gebruikelijk voor willekeurige strengen. Vergeet niet dat de regels ook mogen worden toegepast als we x en/of y en/of z instantiëren met de *lege* streng!)

- Geef een afleiding voor de streng $\square\square\triangle\diamond\square\square$.
- Bewijs dat de streng $\square\square\diamond\triangle\square\square$ geen stelling van dit formele systeem is.

Opgave 2 (6+4 ptn.)

- Geef de waarheidstafel voor de formule $p \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \wedge (p \vee r))$.
- Zet vervolgens deze formule om in een disjunctieve normaalvorm.

Opgave 3 (15 ptn.) Beschouw in Tarski's World het model dat gegeven is in de volgende figuur. We veronderstellen bekendheid met de taal en de terminologie van Tarski's World.



Geef voor elk van de volgende formules aan of ze waar zijn in het gegeven model. (Motivering niet nodig. Indien u moeite heeft met de terminologie kunt u zich oriënteren op het referentiemodel op de losse pagina.)

- $\forall x(\exists y \text{ FrontOf}(y, x) \rightarrow \neg \text{Tet}(x))$
- $\forall x\forall y (\text{FrontOf}(y, x) \rightarrow \text{Dodec}(x))$
- $\forall x\forall y\forall z\forall w((\text{LeftOf}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(y, z) \wedge \text{LeftOf}(z, w)) \rightarrow \text{Cube}(w))$
- $\forall x\forall y\forall z((\text{LeftOf}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(y, z)) \rightarrow \text{Cube}(z))$
- $\forall x(\text{Cube}(x) \leftrightarrow \exists y\exists z(\text{FrontOf}(x, y) \wedge \text{BackOf}(x, z)))$
- $\forall x(\forall y(\text{FrontOf}(y, x) \vee \text{RightOf}(y, x) \vee x = y) \rightarrow \text{Dodec}(x))$
- $\forall x\forall y((\text{FrontOf}(y, x) \vee \text{RightOf}(y, x) \vee x = y) \rightarrow \text{Dodec}(x))$
- $\exists x\exists y(x \neq y \wedge \forall z((\text{Small}(z) \wedge z \neq a \wedge z \neq b \wedge z \neq c) \leftrightarrow (z = x \vee z = y)))$

Opgave 4 (5+5+5 ptn.)

Gegeven is een predicaatlogische taal met daarin één constante a , één éénplaatsig predicaatsymbool M en twee tweeplaatsige predicaatsymbolen L en K . We interpreteren deze taal op een groep leerlingen en leraren van een middelbare school, waarbij de vertaalsleutel als volgt is:

a Anna
 Mx x is een man/jongen
 Lxy x doceert aan y
 Kxy x zit by y in de klas.

Geef nu de predicaatlogische vertaling van de volgende zinnen:

- a) Anna heeft geen les van vrouwen.
- b) Iedere klasgenoot van Anna heeft precies dezelfde docenten als Anna.
- c) Er zitten niet meer dan drie jongens bij Anna in de klas.

Opgave 5 (5+5+5 ptn.)

Geef natuurlijke deductie afleidingen voor:

- a) $\neg\forall x\exists yRxy \vdash \neg\forall xRxx$;
- b) $\neg p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow p$;
- c) $\exists x(Px \vee Qx), \forall x\neg Qx \vdash \exists xPx$.

Opgave 6 (10 ptn.)

De onderstaande gevolgtrekking is ongeldig. Specificeer een tegenmodel waaruit dat blijkt.

$$\forall x\exists y(Rxy \wedge x \neq y), \forall xRxx \models \forall x\forall y(Rxy \vee Ryx).$$

Opgave 7 (5+5 ptn.)

- a) Geef de correctheidsstelling van de propositielogica.
- b) We noemen een verzameling formules Σ *vervulbaar* als er een waardering V is die een model is voor Σ .

Toon aan dat elke vervulbare verzameling formules consistent is.

Het toetscijfer is gelijk aan 1 plus het tiende deel van het behaalde aantal punten. Bij opgave 3 kost elk fout antwoord 4 punten.

Dit plaatje dient als referentie. Het bevat van elk soort veelvlak (kubus, dodecaeder, tetraeder) een klein, een medium en een groot exemplaar. Voor de goede orde: in de terminologie van Tarski's World ligt de grote kubus *achter* alle andere objecten, en *links van* alle tetraeders.

