

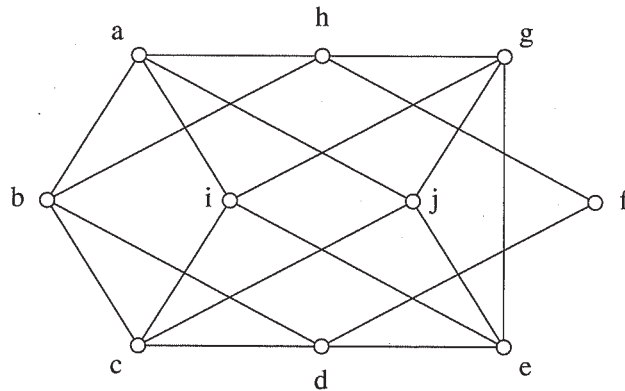
Veegtentamen: Inleiding Grafentheorie 28-05-2009

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het algoritme van Fleury

In deze opgave worden uitsluitend gewone, ongerichte grafen bekeken.

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat bedoelt men met een *Euler toer* in een graaf?
 - (ii) Wat is een *brug* in een graaf?
 - (iii) Formuleer de *Stelling van Euler* over Euler toeren in een graaf.
- (b) Geef een korte beschrijving van het *Fleury algoritme* voor het construeren van een Euler toer.
- (c) Geef een *Euler toer* in de graaf uit de volgende figuur (je mag de kopie na de multiple choice vragen gebruiken om in te leveren). Het antwoord moet een lijst van punten zijn *in wandelvolgorde*. Bij keuze, gebruik het alfabetisch eerste punt.



Figuur bij opgave 1(c): Euler toer

- (d) Er is een unieke tweedelingsgraaf met 6 punten, waarbij twee punten graad 4 hebben en vier punten graad 2 hebben.
- (i) Ontwerp deze graaf met aandacht voor de uniciteit.
 - (ii) Is deze graaf een Euler graaf?

2. Een algoritme voor het handelsreizigers probleem

- (a) Kennisvragen.
- (i) Formuleer het *handelsreizigers probleem* voor een algemene gewogen graaf.
 - (ii) In een volledige gewogen graaf worden de gewichten soms *afstanden* genoemd. Wat bedoelt men in dat verband met de *driehoeks ongelijkheid*?
- (b) De onderstaande gewichtentabel is geen echte afstanden tabel. Er is namelijk precies één driehoek fout. Geef deze driehoek, en geef aan hoe je deze zou verbeteren om een afstand te krijgen. N.B.: je scoort het beste met een *minimale* wijziging.
- (c) Er is een *benaderend algoritme* voor het handelsreizigers probleem dat functioneert in volledige gewogen grafen. Hiermee kan het gewicht van een gegeven Hamilton cykel (i.h.a. sub-optimaal) verbeterd worden. Beschrijf de herhalings-stap van dit algoritme.

(d)

/	A	B	C	D	E
A	0	13	9	7	11
B	13	0	15	5	18
C	9	15	0	16	3
D	7	5	16	0	17
E	11	18	3	17	0

Ga uit van de links gegeven matrix en van de cykel ABCDEA van gewicht 72. Zoek een lichtere cykel door een aantal malen de procedure uit onderdeel (c) toe te passen. Geef de uiteindelijke cykel die niet meer wordt verbeterd door het algoritme, en geef het gewicht van deze cykel.
N.B.: gebruik de *gegeven* matrix, *niet* de verbetering die je in onderdeel (b) hebt bedacht.

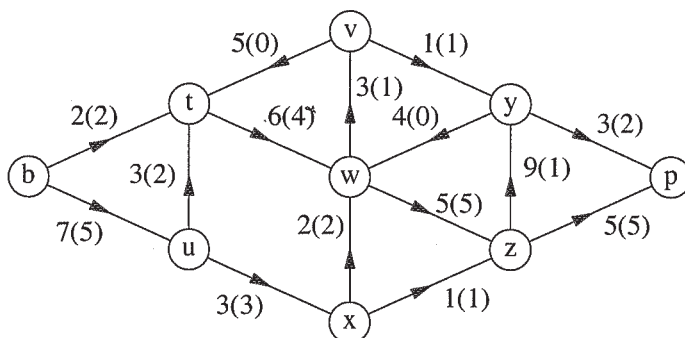
3. Centrum en centroïde van de bomen op zes punten

- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat is de *lengte* van een tak in een boom, en wat is een *centraal punt* van een boom? Wat is het *centrum* van een boom? Geef de definities.
 - (ii) Wat is het *gewicht* van een tak in een boom, en wat is een *centroïdaal punt* van een boom? Wat is de *centroïde* van een boom? Geef de definities.
 - (iii) Stel: je hebt een plaatje van elke boom op n punten (met n een vast gegeven getal). Hoe kun je hiermee snel alle bomen met $n+1$ punten vinden?
- (b) Teken alle niet isomorfe bomen met precies 6 punten. **Aanwijzing:** er zijn precies zes bomen op zes punten. Het volstaat dat je er vijf (verschillende) kan tekenen. Als je ze alle zes goed hebt, verdient je 1 bonuspunt. Let op: elke fout wordt aangerekend, ook al is het de zesde boom!
- (c) Zet bij elk van de in onderdeel (b) gevraagde bomen een "C" bij de punten van het *centrum*. Zet bij elk van de in onderdeel (b) gevraagde bomen een "D" bij de punten van de *centroïde*. Als je ze alle zes goed hebt, verdient je 1 bonuspunt. Let op: elke fout wordt aangerekend, ook al is het bij de zesde boom!

4. Stromen in netwerken

De stelling over stromen in netwerken van Ford en Fulkerson levert een algoritme op voor het construeren van een maximum stroom én van een bijhorende minimum snede.

- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat bedoelt men met een *snede* in een netwerk en met de *capaciteit* van een dergelijke snede?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *onverzadigd pad* (ook wel *stroomvergroterend pad* genoemd) in een netwerk, waarop een stroom is gegeven?
 - (iii) Formuleer de stelling van *Ford en Fulkerson*.
- (b) Beschrijf de procedure waarmee in een netwerk een passende *minimum snede* kan worden geconstrueerd bij een maximum stroom.
- (c) Gebruik de methode die je in (b) hebt beschreven om in het volgende netwerk (dat klaarblijkelijk een maximum stroom draagt) een *minimum snede* te vinden.

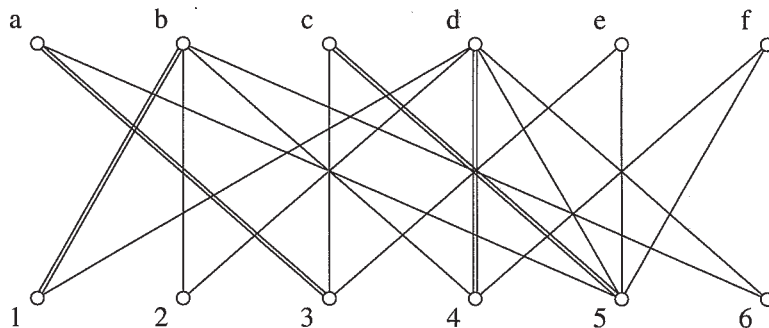


Figuur bij opgave 4(c): netwerk met stroom

De figuur is overgenomen na het multiple choice gedeelte; deze kan voor je antwoord worden gebruikt.

5. Vergrotende wisselpaden en maximum koppelingen

- (a) Kennisvragen. Gegeven is een graaf G met daarin een koppeling F .
- Wat bedoelt men met een F -vergroten wisselpad?
 - Gegeven een F -vergroten wisselpad, hoe *vergroot* je hiermee effectief het aantal koppellijnen?
- (b) Gegeven is een tweedelingsgraaf G en een toewijzing F in G volgens de figuur.
- $F := \{a3, b1, c5, d4\}$ (4 stuks).



Figuur bij Opgave 5b: Tweedelingsgraaf met toewijzing

- (N.B.: De graaf zonder toewijzing is opnieuw getekend op het aparte Multiple-choice blad.) Zoek vanuit deze begintoewijzing methodisch naar een *maximum toewijzing* in G . Geef voldoende details.
- (c) De gevonden maximum koppeling in onderdeel (b) is *niet volledig*. Volgens een bekende stelling dient er dus een deelverzameling W^* van V_1 te zijn, zo dat $\#B(W^*) < \#W^*$. Geef zo'n verzameling W^* , uitgaande van de berekeningen in onderdeel (c).

Normering

1a: 6	2a: 4	3a: 6	4a: 6	5a: 4	6: 21
b: 2	b: 3	b: 4	b: 3	b: 5	
c: 4	c: 3	c: 5	c: 5	c: 5	
d: 4	d: 4				
16	14	15	14	14	21

(Multiplechoice (7): -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

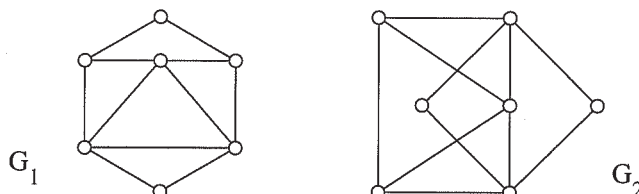
Cijfer = Behaald/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Inleiding Grafentheorie, knop "Course Information", laatste folder) een attachment vinden met de uitwerking van dit veegtentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf. De website blijft geopend tot eind december 2009.

6. Multiple choice vragen

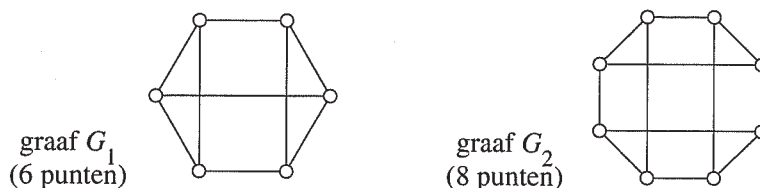
- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- Er is per vraag altijd precies één alternatief juist én (meest) volledig.
- Je hoeft géén toelichting te geven bij de antwoorden.

6.1. Al dan niet *isomorfe* grafen. Gegeven zijn de volgende twee grafen G_1 en G_2 .



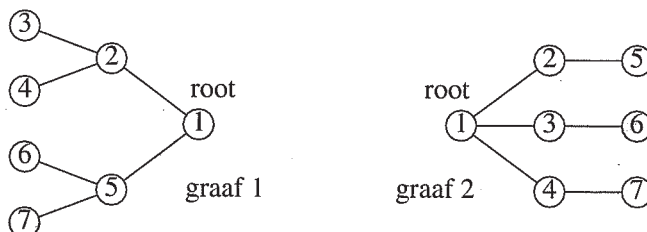
- o De grafen G_1 en G_2 hebben dezelfde aantallen punten van graad 2, 3, 4, en zijn dus isomorf.
- o Deze grafen zijn niet isomorf want G_2 heeft kruisende lijnen en G_1 niet.
- o Deze grafen zijn niet isomorf want G_1 is links-rechts symmetrisch en G_2 is boven-onder symmetrisch.
- o Deze grafen zijn niet isomorf want in G_1 hebben de twee punten van graad 2 een grotere afstand dan in G_2 .

6.2. *Tweedelingsgraf*en. Bekijk de volgende twee grafen aandachtig.



- o Beide grafen G_1 en G_2 zijn tweedelig.
 - o Graaf G_1 is tweedelig en graaf G_2 is niet tweedelig.
 - o Graaf G_1 is niet tweedelig en graaf G_2 is tweedelig.
 - o Geen van beide grafen G_1 en G_2 is tweedelig.
- 6.3. In een *Hamilton graaf* geldt altijd het volgende.
- o Wegname van $k > 0$ punten breekt de graaf in ten hoogste k componenten.
 - o Ieder punt heeft graad $\geq n/2$, waar n het totale aantal punten is.
 - o Er is een gesloten wandeling die door elke lijn één keer komt.
 - o ... Elk van de genoemde eigenschappen gaat wel een keer fout in een Hamilton graaf.

6.4. In het volgende plaatje staan twee gewortelde bomen en voor elk een nummering van de punten.



- o De grafen hebben beide een DFS-nummering.
- o De grafen hebben beide een BFS-nummering.
- o Graaf 1 heeft een DFS nummering, graaf 2 een BFS nummering.
- o Graaf 1 heeft een BFS nummering, graaf 2 een DFS nummering.

6.5. Met het *Prim algoritme* construeert men

- o een minimum-capaciteit snede in een netwerk.
- o een maximum-stroomsterkte in een netwerk.
- o een minimum-gewicht opspannende boom in een gewogen graaf.
- o een kortste-padenboom in een gewogen graaf.

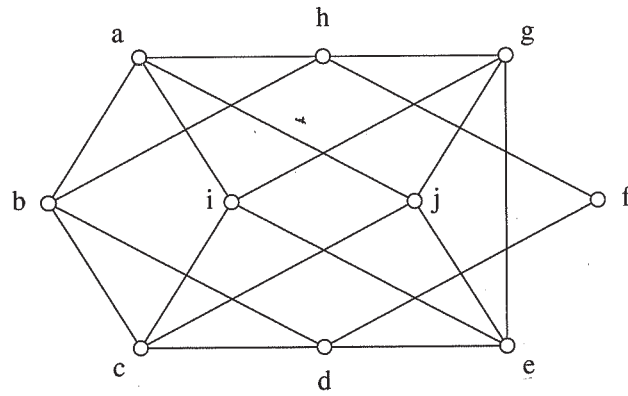
6.6. De stelling van *Berge-Petersen* zegt:

- o Een koppeling F is volledig precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F –wisselpad bestaat.
- o Elke koppeling kan worden uitgebreid tot een maximum koppeling.
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

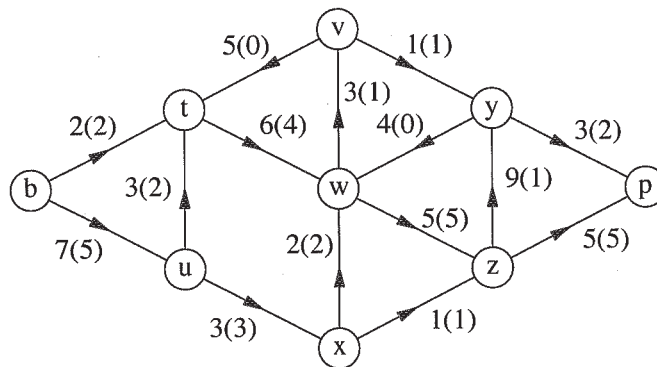
6.7. Het *burentekort* van een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ is

- o Het aantal punten in V_1 dat geen buur heeft in V_2 .
- o het verschil $\#W - \#B(W)$, gemiddeld over alle W deelverzameling van V_1 .
- o het grootste positieve verschil $\#W - \#B(W)$ voor W een deelverzameling van V_1 , of 0 als er geen positief verschil is.
- o het totale aantal punten van de graaf dat niet kan worden toegewezen bij een maximum toewijzing.

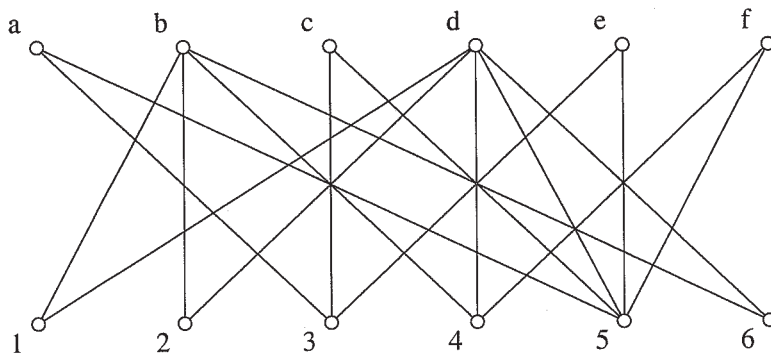
N.B.: als W een collectie vertices is, dan staat $B(W)$ voor de burencollectie van W .



Figuur bij opgave 1(c): Euler toer



Figuur bij opgave 4(c): netwerk met stroom



Figuur bij opgave 5(b): De tweedelingsgraaf