

Herkansing: Inleiding Grafentheorie 18-08-2008

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Grafen en puzzels

- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat bedoelt men met de *graad* van een punt v in een graaf G ?
 - (ii) Wat zegt de *gradenformule* over een graaf G met vertexverzameling V en lijnenverzameling E ?
- (b) We zoeken een graaf met zeven punten, waarvan twee punten van graad 2, drie van graad 3, en twee van graad 5. Bestaat een dergelijke graaf? Zo nee, geef aan waarom de gezochte graaf niet bestaat. Zo ja, maak een *ontwerp* en geef ook aan of dit ontwerp al dan niet uniek is (op isomorfisme na).
- (c) We zoeken een graaf met zes punten, waarvan twee van graad 2, één van graad 3, twee van graad 4, en één van graad 5. Bestaat een dergelijke graaf? Zo nee, geef aan waarom de gezochte graaf niet bestaat. Zo ja, maak een *ontwerp* en geef ook aan of dit ontwerp al dan niet uniek is (op isomorfisme na).

N.B.: Achteraan het multiple choice-gedeelte vind je een aanzet van tekening bij de onderdelen (b) en (c). Je mag deze gebruiken voor je oplossing.

2. Een algoritme voor het handelsreizigers probleem

- (a) Algemene kennis
- (i) In een gewogen graaf worden de gewichten soms *afstanden* genoemd. Wat bedoelt men in dat verband met de *driehoeks ongelijkheid*?
 - (ii) In onderdeel (c) wordt gewerkt met een gewogen graaf via zijn *gewichtenmatrix*. Geef aan waarom deze gewichten geen afstanden zijn.
 - (iii) Wat bedoelt men met de *afstandsgraaf* G' bij een gegeven gewogen graaf G ? Uit je antwoord moet blijken hoe de graaf G' gemaakt wordt uit G en hoe de "afstanden" op G' gemaakt worden.
- (b) Het *handelsreizigers probleem* in een gewogen graaf G gaat over de *lichtste rondwandeling* langs alle punten van G . Geef bondig weer hoe dit probleem wordt omgezet in het vinden van een *lichtste Hamilton cykel* in de *afstandsgraaf* G' van G . Je hoeft niets te bewijzen.
- (c)

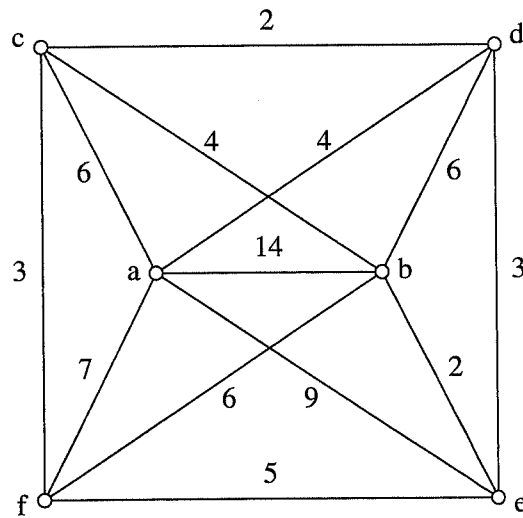
\	A	B	C	D	E
A	0	7	6	8	10
B	7	0	9	6	5
C	6	9	0	5	9
D	8	6	5	0	3
E	10	5	9	3	0
gewichtenmatrix					

Hiernaast is een gewichtenmatrix van een volledige graaf G op $\{A, \dots, E\}$. Pas eerst met minimale wijzigingen de matrix aan tot het een echte afstandenmatrix is, en teken de bijbehorende afstandsgraaf G' met gewichten bij de lijnen.

- (d) Ga uit van de afstandenmatrix, gevonden in onderdeel (c) en van de cykel $A B C D E A$. Zoek van hieruit systematisch met het "benaderende algoritme" naar een verbetering van de cykel, en geef het totale gewicht van de beste cykel die zo via enkele stappen van het algoritme bereikt wordt. **N.B.:** je hoeft *niet* te controleren of je cykel ook echt optimaal is.

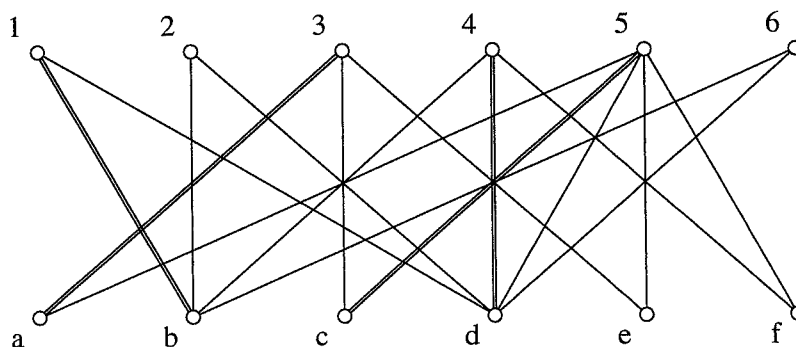
3. Het algoritme van Dijkstra

- (a) Algemene kennis
- (i) Wat bedoelt men met een *pad* tussen twee punten a, b van een graaf G ?
 - (ii) Wat bedoelt men met een (gewone) *samenhangende* graaf?
 - (iii) Beschrijf het zogenaamde *kortste pad probleem* in een gewogen samenhangende graaf G .
- (b) Beschrijf het *algoritme van Dijkstra* waarmee het kortste pad probleem kan worden aangepakt. Geef daarbij vooral aan welke "registers" worden bijgehouden.
- (c) Pas het algoritme toe op de volgende gewogen graaf en de punten a en b . Je scoort beter als je je boekhouding toont.



4. Vergrotende wisselpaden en maximum koppelingen

- (a) Kennisvragen. Gegeven is een graaf G met daarin een koppeling F .
- (i) Wat bedoelt men met een F -*vergotend wisselpad*?
 - (ii) Gegeven een F -*vergotend wisselpad*, hoe *vergroot* je hiermee effectief het aantal koppellijnen?
- (b) Gegeven is een tweedelingsgraaf G en een toewijzing F in G volgens de figuur.
- $F := \{1b, 3a, 4d, 5c\}$.



Figuur bij Opgave 4b: Tweedelingsgraaf met toewijzing

- (N.B.: De graaf zonder toewijzing is opnieuw getekend op het aparte Multiple-choice blad.) Zoek vanuit deze begintoewijzing methodisch naar een *maximum toewijzing* in G . Geef voldoende details.
- (c) De gevonden maximum koppeling in onderdeel (b) is *niet volledig*. Volgens een bekende stelling dient er dus een deelverzameling W^* van V_1 te zijn, zo dat $\#B(W^*) < \#W^*$. Geef zo'n

verzameling W^* , uitgaande van de berekeningen in onderdeel (c).

Normering

1a:	4	2a:	6	3a:	6	4a:	4	4:	20
b:	7	b:	4	b:	4	b:	7		
c:	7	c:	4	c:	6	c:	5		
		d:	6						
18		20		16		16		20	

(Multiplechoice (7): -4 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Inleiding Grafentheorie, knop "Course Information", folder "Week 34") een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

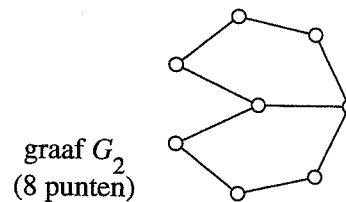
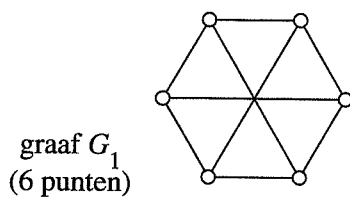
5. Multiple choice vragen

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- Er is per vraag altijd precies één alternatief juist én (meest) volledig.
- Je hoeft géén toelichting te geven bij de antwoorden.

5.1. Een graaf $G=(V, E)$ is een *Euler graaf* als

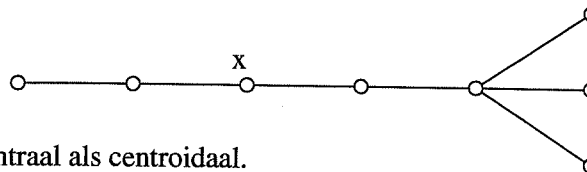
- o G een open wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een open wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.

5.2. *Tweedelingsgrafen*. Bekijk de volgende twee grafen aandachtig.



- o Beide grafen G_1 en G_2 zijn tweedelig.
- o Graaf G_1 is tweedelig en graaf G_2 is niet tweedelig.
- o Graaf G_1 is niet tweedelig en graaf G_2 is tweedelig.
- o Geen van beide grafen G_1 en G_2 is tweedelig.

5.3. *Centrale en centroidale* punten in een boom. In het volgende plaatje van een 8-punts boom is een punt met 'x' gemerkt.



- o Het punt x is zowel centraal als centroidaal.
- o Het punt x is niet centraal maar wel centroidaal.
- o Het punt x is wel centraal maar niet centroidaal.
- o Het punt x is noch centraal noch centroidaal.

5.4. Met het *Prim algoritme* construeert men

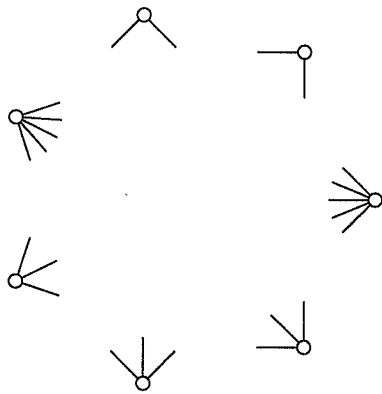
- o een minimum-capaciteit snede in een netwerk.
- o een maximum-stroomsterkte in een netwerk.
- o een minimum-gewicht opspannende boom in een gewogen graaf.
- o een kortste-padenboom in een gewogen graaf.

5.5. De *stelling van Ford & Fulkerson* stelt dat in een netwerk met bron en put

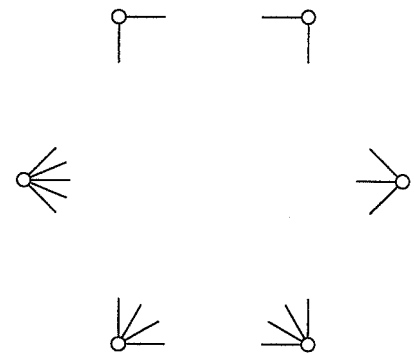
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een pijl.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de totale capaciteit van de bron.
- o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.

5.6. De *stelling van Hall* gaat in eerste aanleg over *volledige toewijzingen* in een tweedelingsgraaf $G := (V_1, V_2, E)$. Een uitgebreide versie houdt rekening met een eventueel *burentekort*. De formulering van deze uitbreiding is als volgt.

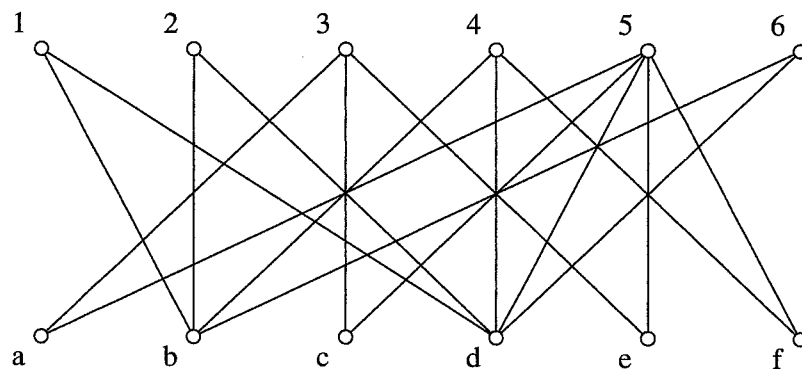
- o Er is een volledige toewijzing van V_1 in V_2 ongeacht het burentekort.
- o Door niet V_2 te gebruiken, maar wel de burencollectie $B(V_1) \subseteq V_2$, wordt het burentekort opgeheven, en dus is er een volledige toewijzing van V_1 in $B(V_1)$.
- o Er is een maximum toewijzing in V_2 enkel en alleen als er geen burentekort is.
- o Er is een maximum toewijzing in V_2 ter grootte van $\#V_1$ min het burentekort.



Aanzet ontwerp bij opg 1b



Aanzet ontwerp bij opg 1c



Figuur bij opgave 4b: De tweedelingsgraaf