

## Deeltentamen II: Inleiding Grafentheorie 08-05-2008

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

### 1. De stelling van Dirac

(a) Kennisvragen.

- (i) Wat bedoelt men met een *Hamilton graaf*?
- (ii) Formuleer de *stelling van Dirac* over Hamilton grafen.

In wat volgt is de graaf  $G$  gegeven door: de volledige graaf  $K_n$  op de punten  $1, 2, \dots, 6$ , met wegnemen van de lijnen  $12, 34, 56, 13, 24$ .

- (b) Maak een tekening van  $G$  en controleer dat  $G$  voldoet aan de voorwaarde(n) van de stelling van Dirac.
- (c) We gaan uit van het pad  $1-5-3-6-4$  in  $G$  en het punt 2 buiten dit pad. Alle burens van de eindpunten 1, 4 liggen op het pad, dat daarom niet kan worden verlengd. Gebruik de methode van *Dirac's bewijs* om dit pad te "upgraden" tot een pad door alle punten.
- (d) Het pad, dat je in onderdeel (c) hebt gevonden, gaat door alle punten, maar er is geen lijn om het te sluiten tot een cykel. Gebruik de methode uit *Dirac's bewijs* om het pad alsnog te "upgraden" tot een cykel door alle punten.

### 2. Een algoritme voor het handelsreizigers probleem

(a) Kennisvragen.

- (i) Formuleer het *handelsreizigers probleem* voor een algemene gewogen graaf.
- (ii) In een volledige gewogen graaf worden de gewichten soms *afstanden* genoemd. Wat bedoelt men in dat verband met de *driehoeks ongelijkheid*?

(b) De onderstaande gewichtentabel is geen echte afstanden tabel. Er is namelijk precies één driehoek fout. Geef deze driehoek, en geef aan wat je zou verbeteren om een afstand te krijgen.

**Aanwijzing.** De oplossing is elementair. Ga hier niet aan de slag met Dijkstra's algoritme; dat hoort bij de leerstof van deel 3.

(c) Er is een *benaderend algoritme* van het handelsreizigers probleem dat functioneert in volledige gewogen grafen. Hiermee kan het gewicht van een gegeven Hamilton cykel (i.h.a. sub-optimaal) verbeterd worden. Beschrijf (zo je wil, aan de hand van een plaatje) de herhalings-stap van dit algoritme.

(d)

| / | A  | B  | C  | D  | E  |
|---|----|----|----|----|----|
| A | 0  | 13 | 9  | 7  | 11 |
| B | 13 | 0  | 15 | 5  | 18 |
| C | 9  | 15 | 0  | 16 | 3  |
| D | 7  | 5  | 16 | 0  | 17 |
| E | 11 | 18 | 3  | 17 | 0  |

Ga uit van de links gegeven matrix en van de cykel A B C D E A van gewicht 72. Zoek een lichtere cykel door een aantal malen de procedure uit onderdeel (c) toe te passen. Geef de uiteindelijke cykel die niet meer wordt verbeterd door het algoritme, en geef de totale lengte van deze cykel.

**N.B.:** gebruik de *gegeven* matrix, *niet* de verbetering die je in onderdeel (b) hebt bedacht.

### 3. Centrum en centroïde van de bomen op zes punten

- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat is de *lengte* van een tak in een boom, en wat is een *centraal punt* van een boom? Wat is het *centrum* van een boom? Geef de definities.
  - (ii) Wat is het *gewicht* van een tak in een boom, en wat is een *centroïdaal punt* van een boom? Wat is de *centroïde* van een boom? Geef de definities.
- (b) Teken alle niet isomorfe bomen met precies 6 punten. **Aanwijzing:** er zijn precies zes bomen op zes punten. Het volstaat dat je er vijf (verschillende) kan tekenen. Als je ze alle zes goed hebt, verdien je 1 bonuspunt. Let op: elke fout wordt aangerekend, ook al is het de zesde boom!
- (c) Zet bij elk van de in onderdeel (b) gevraagde bomen een "C" bij de punten van het *centrum*. Zet bij elk van de in onderdeel (b) gevraagde bomen een "D" bij de punten van de *centroïde*. Als je ze alle zes goed hebt, verdien je 1 bonuspunt. Let op: elke fout wordt aangerekend, ook al is het bij de zesde boom!

#### Normering

|       |   |       |   |       |   |       |    |
|-------|---|-------|---|-------|---|-------|----|
| 1a:   | 5 | 2a:   | 5 | 3a:   | 6 | 4:    | 22 |
| b:    | 6 | b:    | 6 | b:    | 7 |       |    |
| c:    | 7 | c:    | 6 | c:    | 7 |       |    |
| d:    | 7 | d:    | 6 |       |   |       |    |
| <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |    |
| 25    |   | 23    |   | 20    |   | 22    |    |

(Multiplechoice: -6 ptn per fout)

**Totaal te behalen = 90**

**Cijfer = Totaal/10 + 1**

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Inleiding Grafentheorie, knop "Course Information", folder "Week 22") een attachment vinden met de uitwerking van dit (deel)tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

#### 4. Multiple choice vragen

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag altijd precies één alternatief juist én (meest) volledig.
- Je hoeft géén toelichting te geven bij de antwoorden.

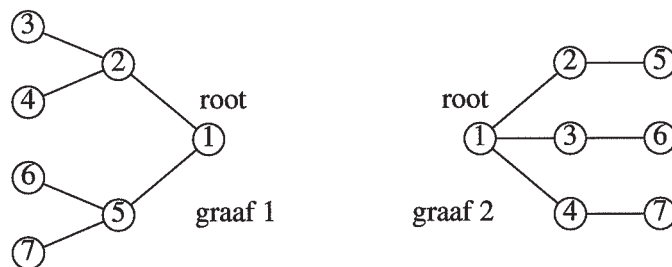
4.1. Welke van de volgende uitspraken karakterizeert *bomen*?

- o Er is ten hoogste één pad tussen elke twee punten.
- o  $\#E = \#V + 1$ .
- o Wegnemen van een lijn elimineert altijd een cykel.
- o Toevoegen van een lijn creëert altijd een cykel.

4.2. In een *Hamilton graaf* geldt altijd het volgende.

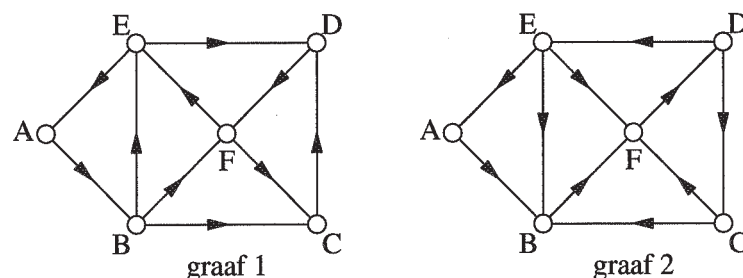
- o Wegname van  $k > 0$  punten breekt de graaf in ten hoogste  $k$  componenten.
- o Ieder punt heeft graad  $\geq n/2$ , waar  $n$  het totale aantal punten is.
- o Er is een gesloten wandeling die door elke lijn één keer komt.
- o ... Elk van de genoemde eigenschappen gaat wel een keer fout in een Hamilton graaf.

4.3. In het volgende plaatje staan twee gewortelde bomen en voor elk een nummering van de punten.



- o De grafen hebben beide een DFS-nummering.
- o De grafen hebben beide een BFS-nummering.
- o Graaf 1 heeft een DFS nummering, graaf 2 een BFS nummering.
- o Graaf 1 heeft een BFS nummering, graaf 2 een DFS nummering.

4.4. De Hamilton eigenschap in *gerichte grafen*. Bekijk de volgende twee gerichte grafen.



- o Beide grafen hebben een gerichte Hamilton cykel.
- o Graaf 1 heeft een gerichte Hamilton cykel, graaf 2 heeft enkel een gericht Hamilton pad.
- o Beide grafen hebben enkel een gericht Hamilton pad.
- o Tenminste één van deze grafen heeft géén gericht Hamilton pad.