

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

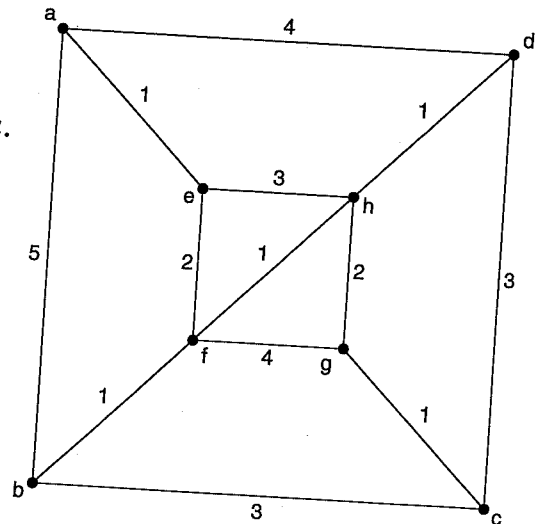
1 Tweedelingsgrafen en cyclen.

- Wat betekent het als twee grafen *isomorf* zijn? Geef de definitie. Geef ook de definitie van een *tweedelingsgraaf* (*bipartite graaf*).
- Gegeven een graaf, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan een getal $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel met lengte ten minste $k+1$. Geef aan hoe U zo'n cykel zou kunnen vinden.
- Gegeven een *tweedelingsgraaf*, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel met lengte ten minste $2 \cdot k$. Geef aan hoe U deze cykel zou kunnen vinden.

2 Opspannende bomen en algoritmen.

Gegeven een samenhangende graaf, met op de lijnen een gewichtsfunctie met als waardengebied de positieve reële getallen, en waarbij de gewichten op alle lijnen verschillend zijn. Wij vergelijken het algoritme van *Dijkstra* voor de kortste paden boom met het algoritme van *Prim* voor de minimale opspannende boom.

- Geef een korte beschrijving van het algoritme van *Prim*.
 - Geef een korte beschrijving van het algoritme van *Dijkstra*.
 - Behandel de graaf uit de tekening hiernaast met de algoritme van *Prim*, uitgaande van het punt *a*. Geef in een tabelvorm per punt: (i) Het punt in volgorde van toevoeging, (ii) de lijn die dit punt met het voorgaande verbindt (iii) het gewicht van de toegevoegde lijn. (iv) de waarde van de partiele boom. Geef na de tabel het totaalgewicht van de opspannende boom.
 - Behandel de graaf uit de tekening hiernaast met de algoritme van *Dijkstra*, uitgaande van het punt *a*. Geef in een tabelvorm per punt: (i) Het punt in volgorde van definitieve waardetoekenning, (ii) de lijn die dit punt met het voorgaande verbindt (iii) het gewicht van de toegevoegde lijn. (iv) de waarde van dit punt. Geef na de tabel het totaalgewicht van de opspannende boom.
- N.B. De delen c) en d) worden beoordeeld op de correctheid van de volgorde met betrekking tot de gevraagde algoritmen.



3 *Bomen en tellingen van lijnen, punten en componenten.*

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- b) Bewijs, dat in een boom het aantal punten V precies 1 meer is dan het aantal lijnen E .
- c) Gegeven een graaf zonder circuits. Hoe kan men dan het aantal componenten afleiden uit het aantal punten V en het aantal lijnen E ? Bewijs uw antwoord.

4 *Capaciteitsvergroting in een netwerk.*

We bestuderen het netwerk dat wordt gegeven door de incidentie lijst in de hierbij gegeven tabel. De eerste kolom bestaat uit de staarten van de pijlen, de tweede kolom geeft de koppen van de pijlen aan, en de derde kolom de capaciteiten voor ieder pijl.

- a) Welk punt in dit netwerk is de *bron* en welk is de *put*?
- b) Maak een duidelijke systematische tekening van dit netwerk met de *bron* links en de *put* rechts. Zet de capaciteiten bij de pijlen.
- c) Bepaal de maximum stroom in dit netwerk, en zet de stroomsterkte ook bij de pijlen van de tekening uit het vorige onderdeel.
- d) Verhoog nu de capaciteit van de pijl van c naar e met 2 tot 6, en van b naar d met 2 naar 7. Ga na of de stroom in het netwerk kan worden vergroot. Geef een lijst van stroomvergrotenende paden, totdat de maximum stroom is bereikt. Geef weer aan met welke snede deze maximum stroom correspondeert.

<i>staart</i>	<i>kop</i>	<i>capaciteit</i>
a	b	9
a	f	1
b	d	5
b	e	3
c	a	7
c	e	4
e	f	6
f	d	6

NORMERING

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|-----------------------------------|
| 1a 2 pt | 2a 2 pt | 2d 3 pt | 3c 3 pt | 4a 3 pt |
| 1b 3 pt | 2b 3 pt | 3a 1 pt | 4a 1 pt | 4a 4 pt |
| 1c 4 pt | 2c 2 pt | 3b 3 pt | 4b 2 pt | Multiple Choice: 1 punt per vraag |

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

1-6-2007

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

- 5 Een k -reguliere graaf is
- ☐ een gerichte graaf waarin elk punt in- en uitgraad k heeft.
 - ☐ een volledige graaf met k elementen.
 - ☐ een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht k krijgt.
 - ☐ een graaf waarin elk punt van graad k is.
 - ☐ de graaf die een regelmatig k -vlak (polyeder) voorstelt.
- 6 Zij $G=(V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is
- ☐ een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van W en V_2 .
 - ☐ een toekenning van ten hoogste $|W|$ punten uit V_2 aan W .
 - ☐ een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigt.
 - ☐ een verzameling B van burens van W zo dat $|B| \geq |W|$.
 - ☐ een koppeling in G die de punten van W onverzadigd laat.
- 7 Een graaf $G=(V, E)$ is een Hamilton graaf als
- ☐ G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V één keer aandoet.
 - ☐ G een geïnduceerde cykel bevat.
 - ☐ G een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
 - ☐ G samenhangend is en geen bruggen bevat.
 - ☐ G een opspannende cykel bevat.
- 8 Een netwerk is
- ☐ een gerichte graaf met een bron en put waartussen een stroom loopt.
 - ☐ een gerichte graaf met bron en put waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.
 - ☐ een gerichte graaf met bron en put waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
 - ☐ een gewogen graaf (de gewichten stellen de capaciteit voor).

Z.O.Z.

- 9 Zij $G=(V,E)$ een graaf. Een Euler ronde in G is gedefinieerd als
- ☐ een wandeling die elk punt van V precies één keer aandoet.
 - ☐ een wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
 - ☐ een gesloten wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
 - ☐ een cykel die door alle punten van V gaat.
 - ☐ een gesloten wandeling die elke lijn van E ten hoogste één keer aandoet.
- 10 Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G=(V,E)$ is
- ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een deelgraaf van G met vertex verzameling V en die geen cyclen heeft.
 - ☐ een samenhangende deelgraaf van G zonder cyclen.
 - ☐ een boom met dezelfde vertices als G .
- 11 Een koppeling in een graaf $G=(V,E)$ is gedefinieerd als
- ☐ een verzameling F van extra lijnen zo dat alle componenten van G onderling verbonden worden ("gekoppeld") door lijnen uit F .
 - ☐ een van de kleuren van een nette lijnkleuring van G .
 - ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zo dat geen vergrotend F -wisselpad bestaat in G .
 - ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zodat geen twee lijnen uit F een uiteinde gemeen hebben.
 - ☐ een maximale samenhangende deelgraaf van G .
- 12 De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G=(V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als
- ☐ $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .
 - ☐ de graad van elk punt uit V_1 tenminste $|V_2|/2$ is.
 - ☐ $|V_1| \leq |V_2|$.
 - ☐ $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
 - ☐ $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .
- 13 Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf waar
- ☐ een gerichte Hamilton cykel mogelijk is.
 - ☐ tussen elk tweetal punten een gericht pad bestaat.
 - ☐ tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
 - ☐ aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").