



Tentamen Inleiding Grafentheorie 2-6-2006

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 Tweedelingsgrafen en cyclen.

- a) Wat betekent het als twee grafen *isomorf* zijn? Geef de definitie. Geef ook de definitie van een *tweedelingsgraaf* (*bipartite graaf*).
- b) Gegeven een graaf, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan een getal $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel met lengte ten minste $k + 1$. Geef aan hoe U zo'n cykel zou kunnen vinden.
- c) Gegeven een *tweedelingsgraaf*, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel met lengte ten minste $2 \cdot k$. Geef aan hoe U deze cykel zou kunnen vinden.

2 Bomen en tellingen van lijnen en punten.

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- b) Bewijs, dat in een boom het aantal punten $|V|$ precies 1 meer is dan het aantal lijnen $|E|$.
- c) Gegeven een samenhangende graaf met $|V| = |E| + 1$. Bewijs hieruit dat deze graaf een boom moet zijn.

3 Opspannende bomen en de uitwisselings stelling.

- a) Geef de definitie van een *opspannende boom* van een samenhangende graaf.
- b) Gegeven een samenhangende graaf, en daarop twee opspannende bomen T en T' , dan bestaat er een rij van opspannende bomen $T = T_0, T_1, T_2, \dots, T_k = T'$, waarbij voor elke $i = 1, 2, \dots, k$ geldt dat T_i uit T_{i-1} ontstaat door een lijn van T_{i-1} te wisselen voor een andere.
Bewijs dit.

4 Capaciteitsvergroting in een netwerk.

We bestuderen het netwerk dat wordt gegeven door de incidentie lijst in de hiernaast gegeven tabel. De eerste kolom bestaat uit de staarten van de pijlen, de tweede kolom geeft de koppen van de pijlen aan, en de derde kolom de capaciteiten voor ieder pijl.

a) Welk punt in dit netwerk is de **bron** en welk punt is de **put**?

b) Maak een duidelijke systematische tekening van dit netwerk met de **bron** links en de **put** rechts. Zet de capaciteiten bij de pijlen.

c) Bepaal de maximum stroom in dit netwerk, en zet de stroomsterkte ook bij de pijlen van de tekening uit het vorige onderdeel.

d) Verhoog nu de capaciteit van de pijl van **c** naar **e** met 2 tot 6, en ga na of de stroom in het netwerk kan worden vergroot, en bepaal weer de maximum stroom. Geef aan met welke snede deze maximum stroom correspondeert.

e) Verhoog nu bovendien de capaciteit van de pijl van **b** naar **d** met 2 tot 7, en ga na of de stroom in het netwerk kan worden vergroot. Geef een lijst van stroomvergrotenende paden, totdat de maximum stroom is bereikt. Geef weer aan met welke snede deze maximum stroom correspondeert.

<i>staart</i>	<i>kop</i>	<i>capaciteit</i>
a	b	9
a	f	1
b	d	5
b	e	3
c	a	7
c	e	4
e	f	6
f	d	6

NORMERING

1a 1 pt 2a 1 pt 3a 2 pt 4b 1 pt 4e 3 pt

1b 3 pt 2b 3 pt 3b 7 pt 4c 3 pt

1c 4 pt 2c 4 pt 4a 1 pt 4d 3 pt

Multiple Choice: 1 punt per vraag

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

2-6-2006

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

-
- 5 Een graaf $G=(V,E)$ is een tweedelingsgraaf (bipartiete graaf) als
- ☐ G geen even cykels bevat.
 - ☐ E bestaat uit twee disjunkte deelverzamelingen E_1, E_2 , zo dat een lijn uit E_1 en uit E_2 nooit een uiteinde gemeen hebben.
 - ☐ G precies twee componenten heeft.
 - ☐ V bestaat uit twee disjunkte deelverzamelingen V_1, V_2 , zo dat iedere lijn uit E een uiteinde heeft in V_1 en in V_2 .
 - ☐ G het komplement is van een samenhangende graaf.
- 6 Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf waar
- ☐ tussen elk tweetal punten een gericht pad bestaat.
 - ☐ tussen elk tweetal punten een ongericht pad bestaat.
 - ☐ tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
 - ☐ tussen elk tweetal punten in beide richtingen één pijl voorkomt.
 - ☐ aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").
- 7 Welke van onderstaande typen grafen is altijd vlak: (Dat wil zeggen: Grafen $G=(V,E)$ die te representeren zijn in het platte vlak zonder dat lijnen elkaar kruisen buiten V).
- ☐ bomen.
 - ☐ reguliere grafen.
 - ☐ Euler grafen.
 - ☐ Hamilton grafen.
 - ☐ grafen die isomorf zijn met $K_{3,4}$.
 - ☐ grafen die isomorf zijn met de Petersen graaf.
 - ☐ geen van deze.
- 8 De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- ☐ bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
 - ☐ bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
 - ☐ een maximumstroom in geen enkele pijl de opgegeven capaciteit overtreft.
 - ☐ bij iedere stroom een onverzadigd (ongericht) pad van bron naar put bestaat.

Z.O.Z.

- 9 De stelling van Berge-Petersen zegt:
- ☐ Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.
 - ☐ Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
 - ☐ Een koppeling F is maximaal precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
 - ☐ Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- 10 Zij $G=(V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is
- ☐ een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigt.
 - ☐ een verzameling B van burens van W zo dat $|B| \geq |W|$.
 - ☐ een koppeling in G die de punten van W onverzadigd laat.
 - ☐ een verzameling extra lijnen van punten uit W naar V_2 .
- 11 Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf
- ☐ de bijhorende afstandsfunctie te bepalen.
 - ☐ een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
 - ☐ een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
- 12 Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G=(V, E)$ is
- ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een deelgraaf van G met vertex verzameling V en die geen cyclen heeft.
 - ☐ een boom met dezelfde vertices als G .
 - ☐ een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsaamenhangend maakt.
- 13 Met de Dijkstra algoritme construeert men
- ☐ een maximale stroom in een netwerk.
 - ☐ een minimale toewijzing in een gewogen graaf.
 - ☐ een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.
 - ☐ een minimale padenboom in een gewogen graaf.