

Tentamen Inleiding Grafentheorie 15-8-2001

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Gerichte en ongerichte grafen.*

- a) Op welke manier kan het totale aantal lijnen in een **ongerichte** graaf worden bepaald uit de *verbindingsmatrix* van die graaf?
- b) Op welke manier kan het totale aantal pijlen in een **gerichte** graaf worden bepaald uit de *verbindingsmatrix* van die graaf?
- c) Welke verschillende vormen van samenhang kent U in het geval van een **ongerichte** en in het geval van een **gerichte** graaf? Geef alle definities.

2 *Het splitsen van een punt in het bewijs van de stelling van Euler.*

Gegeven is een samenhangende vlakke graaf waarin alle punten een even graad hebben. Bij het construeren van een **Euler ronde** kan worden geprobeerd om net zo lang punten te splitsen tot elk punt de graad 2 heeft.

- a) Als we uit gaan van een punt p van graad 4, die verbonden is met de punten q, r, s en t , dan splitsen we p in twee niet verbonden copieën p_1 en p_2 . Als p_1 verbonden wordt met q en r , en p_2 verbonden wordt met s en t , ontstaat een nieuwe graaf. Als gegeven is dat deze graaf niet samenhangend is, dan wordt de graaf die ontstaat door p_1 te verbinden met q en s en p_2 te verbinden met r en t , in plaats van de eerdere toewijzing, wel samenhangend. Bewijs dit.
- b) Geef aan, hoe door een geschikte keuze van de splitsingen kan worden gezorgd dat de bijbehorende graaf kan worden getekend **zonder** dat het potlood van het papier wordt gehaald, **zonder** dat een lijn meer dan één maal wordt getrokken, en **zonder** dat het potlood een eerder getrokken lijn kruist.

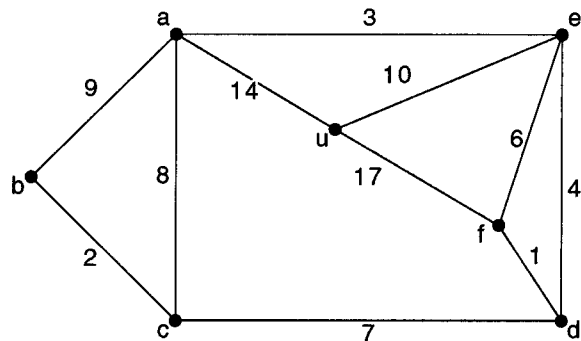
Z.O.Z.

3 *Toernooi grafen en Hamilton paden.*

- a) Geef de definitie van een *toernooigraaf*. Geef de definitie van een *gericht Hamilton pad*.
- b) Bewijs, dat iedere toernooigraaf een gericht Hamilton pad bevat.

4 *Het algoritme van Dijkstra.*

- a) Beschrijf het *algoritme van Dijkstra* voor het kortste pad probleem in een gewogen samenhangende graaf.
- b) Bepaal met dit algoritme alle kortste paden in de hierbij gegeven graaf van het punt *u* naar de overige punten, en geef dan in het bijzonder het kortste pad van $u \rightarrow b$. Wat is de lengte van dit pad?



NORMERING

Elke goed beantwoorde multiple choice vraag geeft 1 pt.

Voor de overige vragen gelden de volgende puntenaantallen :

1a 3 pt	2a 5 pt	3b 6 pt
1b 3 pt	2b 4 pt	4a 5 pt
1c 3 pt	3a 3 pt	4b 4 pt

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

1. Een graaf $G=(V,E)$ is een boom als

- o $|V|=|E|+1$ en G een wortel heeft.
- o tussen elke twee punten een uniek pad bestaat.
- o elke lijn uit E een brug is.
- o G samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft.
- o tussen elke twee punten een kortste pad bestaat.

2.

Een graaf $G=(V,E)$ is een Euler graaf als

- o G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o G samenhangend is en elk punt uit V een even graad heeft.
- o G een open wandeling bevat die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o G de graaf is horend bij een regelmatig veelvlak (polyhedron).
- o G samenhangend is en geen bruggen bevat.

3. Zij $G=(V,E)$ een graaf. Een Hamilton toer in G is gedefinieerd als

- o een gesloten wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o een wandeling die elk punt uit V precies één keer aandoet.
- o een cykel die door alle punten van V gaat.
- o een gesloten wandeling die elk punt uit V ten hoogste één keer aandoet.

4. Een netwerk is

- o een gerichte graaf waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
- o een gerichte gewogen graaf (de gewichten stellen de capaciteit voor).
- o een samenhangende graaf met een bron en put waartussen een stroom loopt.
- o een gerichte graaf waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.

Z.O.Z.

5. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put

- o een maximumstroom in geen enkele pijl de opgegeven capaciteit overtreft.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
- o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
- o bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.

6. Zij $G = (V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is

- o een koppeling in G die de punten van W onverzadigd laat.
- o een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigt.
- o een toekenning van ten hoogste $|W|$ punten uit V_2 aan W .
- o een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van W en V_2 .
- o een verzameling extra lijnen van punten uit W naar V_2 .

7. De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G = (V_1, V_2, E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 in V_2 bestaat enkel en alleen als

- o $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
- o $|V_1| \leq |V_2|$.
- o de graad van elk punt uit V_1 tenminste $|V_2|/2$ is.
- o $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .

8. Een k -reguliere graaf is

- o een volledige graaf met k elementen.
- o een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht k krijgt.
- o een graaf waarin elk punt van graad k is.
- o een graaf met k even grote componenten.
- o een graaf met meervoudige lijnen, waarbij tussen elke twee vertices precies k lijnen bestaan.

9. Welke van onderstaande typen grafen is altijd vlak:

- o reguliere grafen.
- o Polyeder grafen.
- o Euler grafen.
- o grafen die homeomorf zijn met de Petersen graaf.
- o Hamilton grafen.