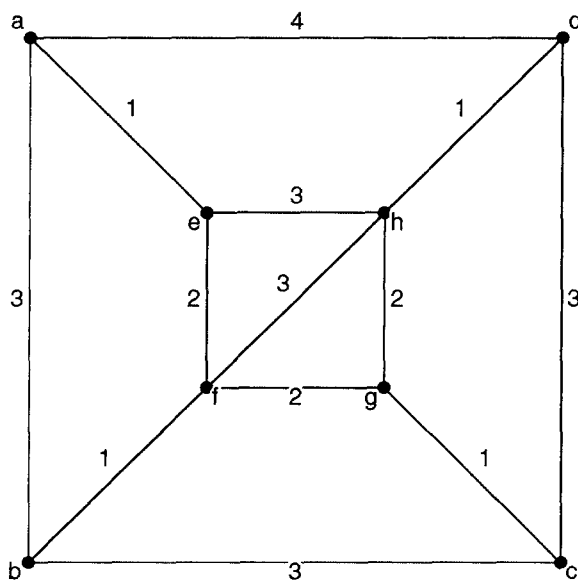


Derde deeltentamen Inleiding Grafentheorie 6-6-2001

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 Opspannende bomen en het algorithm van Prim.



- Geef de definitie van een **opspannende boom** van een samenhangende graaf, en van een **minimale opspannende boom** in een gewogen samenhangende graaf.
- Beschrijf het algorithm van **Prim** voor het vinden van een **minimale opspannende boom** in een gewogen samenhangende graaf.
- Bepaal met dit algorithm een **minimale opspannende boom** in de hiernaast getekende graaf en geef het gewicht van die boom.

2 Stromen in netwerken en de stelling van Hall.

De stelling over stromen in netwerken van Ford en Fulkerson kan ook worden gebruikt om de huwelijksstelling van Hall te bewijzen.

- Geef de definitie van een **netwerk**, en van een **snede** in een **netwerk**. Geef ook de definitie van een **onverzadigd pad** (ook wel *stroomvergroterend pad* genoemd,) in een **netwerk**, waarop een *stroom* s is gedefinieerd.
- Formuleer de stelling van Ford en Fulkerson.
- Geef aan hoe in een **netwerk** met een maximum *stroom* een passende **snede** kan worden geconstrueerd.

Z.O.Z.

- d) Formuleer de Huwelijksstelling van Hall.
- e) Om de huwelijksstelling van Hall te bewijzen kan men een netwerk gebruiken. Geef aan op welke manier een tweedelingsgraaf kan worden omgezet in een netwerk, en hoe we in dit netwerk een kritieke verzameling W en de bijbehorende verzameling $B(W)$ in het netwerk kunnen vinden.

3 *Vergrotende wisselpaden en maximum koppelingen.*

- a) Geef de definitie van een F – vergrotend wisselpad in een graaf G met koppeling F .
- b) Geef het verband aan tussen maximumkoppelingen en F – vergrotende wisselketens.
- c) Neem de tweedelingsgraaf G met $V_1 = \{1, \dots, 6\}$ en $V_2 = \{a, \dots, f\}$ en met de hiernaast gegeven verbindings matrix. Gebruik de “Hongaarse methode” om, uitgaande van de volgende koppeling F , een maximum koppeling in G te vinden: $F = \{1-a, 4-b, 5-c\}$.
- | – | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
- d) De gevonden maximum koppeling in c) is niet volledig. Volgens een bekende stelling dient er dus een deelverzameling W van V_1 te zijn, zo dat $|B(W)| < |W|$. Geef zo’n verzameling W , uitgaande van de berekeningen in onderdeel c).

NORMERING

1a 2 pt	2a 2 pt	2d 2 pt	3b 2 pt
1b 4 pt	2b 2 pt	2e 3 pt	3c 3 pt
1c 3 pt	2c 2 pt	3a 2 pt	3d 3 pt

CIJFER

Bij 0,1,2,3 pt : 1	4,5,6 pt : 2	7,8,9 pt : 3	10,11,12 pt : 4	13,14,15 pt : 5,
16,17,18 pt : 6	19,20,21 pt : 7	22,23,24,25 pt : 8	26,27,28 pt : 9	29,30 pt : 10.

Naam:

Studierichting en jaar:

6-6-2001

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd. In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

1. Een graaf $G = (V, E)$ is een tweedelingsgraaf (bipartiete graaf) als

- o V bestaat uit twee disjunkte deelverzamelingen V_1, V_2 , zo dat iedere lijn uit E een uiteinde heeft in V_1 en in V_2 .
- o G geen even cykels bevat.
- o G precies twee componenten heeft.
- o G het komplement is van een samenhangende graaf.

2. Een graaf $G = (V, E)$ is een Hamilton graaf als

- o G een geïnduceerde cykel bevat.
- o G een opspannende cykel bevat.
- o G een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
- o G een gesloten wandeling bevat die door alle punten van V gaat.
- o G samenhangend is en geen bruggen bevat.

3. Zij $G = (V, E)$ een graaf. Een Euler toer in G is gedefinieerd als

- o een wandeling die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o een wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o een gesloten wandeling die elk punt van V precies één keer aandoet.
- o een gesloten wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- o een gesloten wandeling die elke lijn van E ten hoogste één keer aandoet.

4. Een toernooigraaf is gedefinieerd als een gerichte graaf waar

- o tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
- o tussen elk tweetal punten in beide richtingen één pijl voorkomt.
- o tussen elk tweetal punten een gericht pad bestaat.
- o aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").

5. Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G = (V, E)$ is

- o een deelgraaf van G met vertex verzameling V en die geen cykels heeft.
- o een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
- o een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
- o een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsamenhangend maakt.

Z.O.Z.