

Tentamen Inleiding Grafentheorie 3-6-99

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 Hoge graden en lange cykels.

- a) Wat verstaat U onder de **graad** van een punt in een graaf? Wat verstaat U onder een **pad**? Wat is een **cykel** in een graaf? Hoe bepalen we de **lengte** van een **pad** of een **cykel**? Geef de definities.
- b) Gegeven een graaf, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan een getal $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel ter lengte $k+1$. Geef aan hoe U zo'n cykel zou kunnen vinden.

2 Reguliere en complementaire grafen.

In dit vraagstuk bekijken we uitsluitend ongerichte grafen.

Twee grafen $G_1(V, E_1)$ en $G_2(V, E_2)$ heten **complementair**, als deze grafen dezelfde puntverzameling V hebben, en twee punten in G_1 verbonden zijn, dan en slechts dan als ze in G_2 niet verbonden zijn. Dit betekent dus dat $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, en dat de volledige graaf $K_{|V|} = (V, E_1 \cup E_2)$.

Een graaf heet **regulier** als de graad voor elk punt gelijk is.

- a) De complementaire graaf van een reguliere graaf is zelf regulier. Bewijs dit.
- b) Een samenhangende reguliere graaf met een oneven aantal punten is een Euler graaf. Bewijs dit.
- c) Er zijn precies twee niet isomorfe reguliere grafen op 7 punten met graad 4. Geef de verbindingsmatrices van deze beide grafen.

3 Toernooi grafen en Hamilton paden.

- a) Geef de definitie van een **toernooigraaf**. Geef de definitie van een **gericht Hamilton pad**.

- b) Bewijs, dat iedere toernooigraaf een gericht Hamilton pad bevat.

4 *Bomen en grafen zonder circuits.*

- a) Wanneer heet een graaf een **boom**? Geef de definitie.
b) Als in een graaf tussen elke twee punten **precies** één pad bestaat, dan bevat deze graaf geen circuits. Bewijs dit.
c) Als in een samenhangende graaf elke lijn een **brug** is, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.

5 *Opspannende bomen en algorithmen.*

- a) Geef de definitie van een **opspannende boom** van een samenhangende graaf.
b) Gegeven een samenhangende graaf, met op de lijnen een gewichtsfunctie met als waardengebied de positieve reële getallen. Er bestaan twee algorithmen voor het vinden van een opspannende boom met minimaal gewicht, het algoritme van **Kruskal** (een z.g. **gretige**) en het algoritme van **Prim** (dat inductief bomen construeert). Geef een korte beschrijving van beide algorithmen.
c) Geef aan welke van de twee algorithmen de voorkeur verdient en waarom.

NORMERING

1a 4 pt

2b 3 pt

3b 5 pt

4c 4 pt

5c 2 pt

1b 4 pt

2c 3 pt

4a 2 pt

5a 2 pt

2a 3 pt

3a 4 pt

4b 4 pt

5b 5 pt

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$