

Hertentamen Inleiding Besliskunde II

02-06-2010, 18:30 - 21:15

REKENMACHINE ZONDER GEHEUGENOPSLAG IS TOEGESTAAN

Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 4 pagina's en uit 4 opgaven, waaruit 100 punten te behalen zijn. Voor een voldoende zijn minstens 45 van de 100 punten vereist en voor een 10 slechts 90 vd 100 punten. **Opgaven 3C en 4B zijn lastig**, het is sterk aan te raden om eerst de andere opgaven te maken.

Opgave	A	B	C	D	E
Opg. 1	10	10	5	-	-
Opg. 2	5	15	-	-	-
Opg. 3	10	10	15	-	-
Opg. 4	10	10	-	-	-

$$\text{Eindcijfer} = \min\{10, 1 + \text{puntentotaal}/10 + \text{Eventuele Huiswerkbonus}\}$$

Opgave 1: Netwerken

1A) De provincie Bierburg bevat n steden: $N_1, \dots, N_n$. De directe reisafstand tussen stad N_i en stad N_j is c_{ij} . Kylie vd M. moet voor haar werk een vrachtwagen vol met bier vervoeren van stad N_1 naar de desbetreffende klant, Laurens van der S., wonende in stad N_n . Omdat deze steden nogal ver van elkaar liggen, zal zij tijdens de rit meerdere rustpauzes nemen in verschillende tussenliggende steden. Dus iedere keer als Kylie in een nieuwe stad aankomt neemt ze even pauze. Het besturen van een vrachtwagen valt Kylie nogal zwaar en zij wil daarom de route vinden waarbij de **grootst afgelegde directe reisafstand** tussen twee steden, die zij onderweg bezoekt, zo klein mogelijk is. Met welk algoritme kan dit probleem worden opgelost? Beschrijf dit algoritme in algemene termen. Dus geen zwamverhaal opschrijven maar een op computercode gerichte formulering! **Geef ook aan hoe** Kylie haar optimale route hiermee kan bepalen.

Beschouw een gerichte graaf $G = (X, E)$ waarbij X de verzameling steden is in het netwerk: $X = \{1, \dots, N\}$. Een pijl van stad i naar stad j wordt genoteerd met (i, j) . Laat $E \subseteq X \times X$ (Cartesisch Product) de verzameling pijlen zijn waarover het mogelijk is om te reizen. Laat het niet-negatieve getal c_{ij} met $(i, j) \in E$ de afstand zijn om van stad i rechtstreeks naar stad j te gaan. De geheeltallige lineaire programmeringsformulering om het kortste pad te vinden van stad 1 naar stad N wordt gegeven door:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } (i, j) \text{ op optimale pad,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\
& \text{onder: } \sum_{j: (1,j) \in E} x_{1j} = 1 \\
& \sum_{i: (i,N) \in E} x_{iN} = 1 \\
& \sum_{k: (k,i) \in E} x_{ki} = \sum_{j: (i,j) \in E} x_{ij} \quad \forall i \neq 1, N \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E
\end{aligned}$$

1B) Geef de interpretaties van alle constraints.

1C) Het algoritme van Dijkstra levert naast het kortste pad van stad 1 naar stad N ook meteen het kortste pad van stad 1 naar elke andere stad, levert de bovenstaande geheeltallige LP-formulering dat ook? Licht je antwoord toe. Geef ook aan hoe de bovenstaande formulering aangepast moet worden als het pad uit hoogstens m etappes [pijlen] mag bestaan.

Opgave 2: Branch & Bound

Beschouw het volgende knapzak probleem.

$$\begin{aligned}
& \max \quad 3x_1 + 10x_2 + 9x_3 + x_4 \\
& \text{onder: } \quad 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 13 \\
& \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ én geheel}
\end{aligned}$$

2A) Geef de unieke oplossing van de LP Relaxatie van dit probleem [dat wil zeggen: geef de oplossing van het bovenstaande probleem als de geheeltalligheidseis vervalt]. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde.

2B) Los het bovenstaande knapzak probleem op met behulp van Branch en Bound en vind op deze manier de twee optimale oplossingen en geef de bijbehorende optimale criteriumwaarde.

Opgave 3: Geheeltallige Programmering

De calculerende Marloes B. moet voor volgende periode nog een keuze maken uit een collectie van N keuzevakken (genummerd van 1 tot en met N). Elk vak vereist een bepaalde voorbereidingstijd, levert een aantal studiepunten op en heeft een gegeven moeilijkheidsgraad. Precies geformuleerd: vak j kost Marloes een tijd t_j in uren aan voorbereiding, levert haar p_j studie punten op en wordt door staffleden beoordeeld als een categorie c_j vak, waarbij c_j een geheel getal is tussen 1 en 10 [1 = zeer eenvoudig; ; 10 = heel moeilijk]. Volgens het studieprogramma moet Marloes nog minstens Q studiepunten halen. Marloes wil aan alle vakken tezamen niet meer dan T uur aan voorbereiding besteden. We gaan er vanuit dat Marloes voor elk vak slaagt.

Omdat Marloes een mooie lijst vakken op haar CV wil kunnen presenteren stelt zij haarzelf eerst de vraag, welke vakken zij in de volgende periode moet opnemen om te bereiken dat de som van de moeilijkheidsgraden van de gekozen vakken maximaal is.

3A) Formuleer dit probleem als een geheelgetalig lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van uw gekozen beslissingsvariabelen aan!

3B) Welke restrictie(s) moet Marloes toevoegen als ze vakken 1, 2 en 3 niet mag opnemen in haar vakkenpakket wanneer vak N wordt opgenomen in haar vakkenpakket. Welke restrictie(s) moet je toevoegen als zij precies k vakken van vakken 1 t/m 10 moet volgen (met k vast en $k < 10$)? Welke restricties moet Marloes toevoegen voor het geval dat wanneer Marloes 5 of meer keuzevakken gaat volgen, dat zij dan ook minstens $2Q$ studiepunten uit het samengestelde vakkenpakket moet halen? **Hint:** introduceer voor de laatste restricties een nieuwe binaire beslissingsvariabele!

Veronderstel nu dat Marloes kan kiezen aan welke universiteit zij een bepaald vak volgt: elk keuzevak is te volgen op alle M verschillende universiteiten in Nederland. Het aantal college-uren verschilt echter, op universiteit i neemt vak j een tijd τ_{ij} uren aan colleges in beslag. Aangezien Marloes vanaf nu altijd naar colleges gaat en ze zoveel mogelijk van afwisseling houdt wil ze nu haar vakken zodanig kiezen dat de grootste tijd, die zij aan colleges kwijt is op eenzelfde universiteit, wordt geminimaliseerd.

Het aantal studiepunten en de moeilijkheidsgraden bij elk vak blijven hetzelfde maar er moet nu voldaan worden aan het feit dat de som van de moeilijkheidsgraden van alle vakken die zij volgt minstens C is. Uiteraard moet zij nog steeds minstens Q studiepunten halen en wil zij aan alle vakken tezamen niet meer dan T uur besteden, de totale tijd die zij kwijt is aan vak j is nu de totale voorbereidingstijd voor vak j **plus** de totale tijd die zij aan colleges kwijt is voor vak j . Verder zal zij de colleges van een bepaald vak slechts aan 1 universiteit volgen, mocht zij besluiten dit vak op te nemen in haar vakkenpakket. Tenslotte wil zij aan minstens R verschillende universiteiten college volgen.

3C) Formuleer dit probleem als een (gemengd) geheelgetalig lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van uw gekozen beslissingsvariabelen aan!

Opgave 4: Dynamische Programmering

De afdeling BWI besluit een N teams van k studenten te sturen naar een landelijke Operations Research olympiade. Er zijn M studenten die zich hebben aangemeld met ($M \gg N$). De intelligentie van een student in dit vakgebied wordt gemeten op basis van een open-boek toelatingstentamen, dat iedere (aangemelde) student heeft afgelegd. Het cijfer van student i van deze toets bedraagt b_i [$i = 1, \dots, M$]. Verder zijn er zoveel aanmeldingen dat lang niet iedere (aangemelde) student mee kan doen.

Michiel V. wordt gevraagd om de teams in te delen en hij besluit de teams zodanig in te delen dat het laagste cijfergemiddelde per team zo hoog mogelijk is.

4A) Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval: de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. **Hint:** Je zal dus N keer een team moeten samen stellen. Beschrijf nu eerst stadium j .

Voor de komende N weken wil diepvriesbakker Marten W. een optimale bakstrategie vastleggen die zijn totale kosten minimaliseert. Hij weet dat in week j de vraag naar gebak exact D_j stuks zal bedragen ($j = 1, \dots, N$). Gebak gebakken in week j wordt ingevroren en is pas voor de verkoop beschikbaar in week $j + 1$. Het in voorraad houden van gebak kost een bedrag h per stuk gebak per week aan invrieskosten, te betalen over de totale voorraad aanwezig aan het eind van de week. De vraag naar gebak waaraan niet direct voldaan kan worden, gaat voor de verkoop verloren en brengt boetekosten p met zich mee voor elk stuk gebak dat wel gevraagd maar niet geleverd wordt. De bakkosten per stuk gebak bedragen c_j in week j en in week 1 zijn Q stuks ingevroren gebak in voorraad. Het ingevroren gebak is onbeperkt houdbaar.

4B) Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval: de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. *Hint:* Ga 1 voor 1 de weken af, beschrijf eerst stadium j .

-Einde Tentamen-