

Hertentamen Inleiding Besliskunde II

10-6-2009, 18:30 - 20:30

REKENMACHINE ZONDER GEHEUGENOPSLAG IS TOEGESTAAN

Puntentoekenning

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, waaruit 90 punten te behalen zijn.

Opgave	A	B	C
Opg. 1	10	5	10
Opg. 2	5	15	-
Opg. 3	5	15	5
Opg. 4	10	10	-

Eindcijfer = $\min\{10, 1 + \text{puntentotaal}/10 + \text{Eventuele Huiswerkbonus}\}$

Opgave 1: Prim & Kruskal

1A) Beschouw een **ongericht** netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$ waarbij c_{ij} de kosten zijn om een directe verbinding tussen knooppunt N_i en knooppunt N_j aan te leggen. Geef de algemene wiskundige formulering van **ofwel** het algoritme van Prim **ofwel** het algoritme van Kruskal met de labellingsprocedure voor de berekening van een minimaal opspannende boom. Dus geen 'woordenbrij' maar op een computercode gerichte formulering!

1B) Beschouw wederom een **ongericht** netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$ waarbij het getal c_{ij} , behorende bij de directe verbinding tussen knooppunt N_i en knooppunt N_j , de reisafstand van N_i naar N_j aangeeft. Beschrijf **kort en duidelijk** de aanpak om met Prim (of Kruskal) een pad van een startpunt N_s naar een eindpunt N_e te bepalen zodat de grootste reisafstand over de verbindingen in het pad zo klein mogelijk is.

1C) Het lang verdwenen continent *Atlantis* is recentelijk opgedoken en bestaat uit 10 eilandjes genummerd $i = 1, \dots, 10$. Voordat er weer mensen kunnen wonen wil men dat de eilanden verbonden worden door een dijkensysteem zodat elk eiland vanuit ieder ander eiland bereikbaar is en de kans dat bij een natuurramp één of meer dijken het begeeft minimaal is. Een dijk tussen eilandje i en eilandje j bezwijkt bij een natuurramp met een gegeven kans p_{ij} . Beargumenteer op duidelijke wijze hoe dit probleem kan worden teruggebracht tot het standaardmodel van Prim waarin je een boom zoekt waarvoor de som van de kosten van de verbindingstukken in de boom minimaal zijn.

Opgave 2: Branch & Bound

Beschouw het volgende 0-1 knapzak probleem.

$$\begin{array}{ll} \max & 13x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ \text{onder:} & 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

2A) Geef de oplossing van de LP Relaxatie van dit probleem [dat wil zeggen: geef de oplossing van het probleem als $x_i \in \{0, 1\}$ $i=1, \dots, 4$ vervangen zou worden door $0 \leq x_i \leq 1$ $i=1, \dots, 4$]. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde.

2B) Los het bovenstaande 0-1 knapzak probleem op met Branch en Bound

Opgave 3: Geheeltallige Programmering

Benzinemaatschappij Overakker moet tijdelijk drie verschillende soorten brandstof opslaan. Op het terrein zijn daarvoor 4 opslaglocaties beschikbaar. Opslaglocaties 1, 2 en 3 zijn tanks en hierin kan slechts één type brandstof tegelijk worden opgeslagen. Alles wat niet in de tanks kan worden opgeslagen, wordt opgeslagen op opslaglocatie 4. De hoeveelheid ton die van elke brandstof moet worden opgeslagen is in tabel 1 weergegeven.

Het kost een bedrag c_{ij} om 1 ton van brandstoftype i in opslaglocatie j op te slaan [$i=1,2,3$; $j=1,2,3,4$]. De opslagkosten per ton op opslaglocatie 4 [de c_{i4} 's] zijn echter een stuk hoger dan de opslagkosten per ton in een tank c_{ik} [$k \neq 4$].

In de onderstaande tabellen is het volgende weergegeven: de hoeveelheid van elk type brandstof (in tonnen) die moet worden opgeslagen (Tabel 1) en de capaciteit van iedere opslaglocatie in tonnen (Tabel 2).

Brandstoftype	Hoeveelheid
Brandstof 1	13 ton
Brandstof 2	2 ton
Brandstof 3	18 ton

(a) Tabel 1

Opslaglocatie	Capaciteit
Opslaglocatie 1	6 ton
Opslaglocatie 2	14,3 ton
Opslaglocatie 3	8,1 ton
Opslaglocatie 4	∞

(b) Tabel 2

De directrice, mevr. L. Overakker, wil de totale opslagkosten zo laag mogelijk hebben.

3A) Om dit probleem te formuleren als een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem, introduceren we continue beslissingsvariabelen x_{ij} en binaire beslissingsvariabelen y_{ij} . Geef nu duidelijk de betekenis van deze beslissingsvariabelen aan.

3B) Formuleer het bovenstaande probleem nu als een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem.

3C) Welk restrictie(s) moet je toevoegen als je maximaal 2 tanks mag toewijzen voor het opslaan van brandstoftype 3? Welke restrictie(s) moet je toevoegen wanneer tank 2 niet gebruikt mag worden om brandstoftype 1 in op te slaan als zowel tank 1 als tank 3 gebruikt worden voor het opslaan van brandstoftype 3?

Z.O.Z.

Opgave 4: Dynamisch Programmeren

Bij de vakgroep BWI van de VU werken N docenten en er zijn M studenten met $[M \gg N]$. Elke student moet precies één docent toegewezen krijgen als begeleider voor zijn/haar masterscriptie. Omdat alle studenten inmiddels hun onderwerp gekozen hebben kan men een goede inschatting maken van de tijd die het begeleiden van een student zal kosten. Deze tijd is mede afhankelijk van de docent. Precies gezegd, voor een optimale begeleiding zal student i van docent j een tijd t_{ij} [weken] voor zijn/haar begeleiding vergen. Elke docent heeft aangegeven hoeveel tijd hij voor scriptiebegeleiding beschikbaar heeft: voor docent j is dit T_j weken $[j = 1, \dots, N]$.

Nu blijkt de totale minimale tijd die de studenten nodig hebben, i.e. $\sum_{i=1}^M \min_{j=1,2,\dots,N} \{t_{ij}\}$ groter te zijn dan de totale tijd die de docenten beschikbaar hebben, i.e. $\sum_{j=1}^N T_j$. Omdat alle studenten beslist een optimale begeleiding willen, zullen sommige docenten meer dan hun als beschikbaar opgegeven tijd aan scriptiebegeleidingen moeten besteden.

Beschouw nu het volgende criterium: de studenten moeten zodanig over de docenten verdeeld worden, zodat de grootste overschrijding van de tijden die de docenten bereid zijn aan de begeleiding te besteden, minimaal is.

4A) Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. *Hint: het is handig om eerst op te schrijven wat stadium j voorstelt!*

De oplossing van het bovenstaande probleem leidt tot grote ontevredenheid onder de docenten. De vakgroepvoorzitter Prof. C. Ten Hoope stelt nu voor om docent j een bedrag b_j extra salaris te geven voor elke week scriptiebegeleiding die de beschikbare tijd van docent j , T_j , te boven gaat. Prof. ten Hoope streeft er nu naar om het totale bedrag dat zij zal moeten besteden aan de extra salarissuitgaven te minimaliseren. Hoe moeten de studenten volgens dit criterium verdeeld worden over docenten?

4B) Formuleer dit nieuwe probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. *Hint: het is handig om eerst op te schrijven wat stadium j voorstelt!*

-Einde Tentamen-