

Tentamen Inleiding Besliskunde II

25-3-2009, 15:15 - 17:15

REKENMACHINE ZONDER GEHEUGENOPSLAG IS TOEGESTAAN

Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's en uit 4 opgaven, waaruit 90 punten te behalen zijn.

Opgave	A	B
Opg. 1	15	10
Opg. 2	5	15
Opg. 3	20	-
Opg. 4	15	10

$$\text{Eindcijfer} = \min\{10, 1 + \text{puntentotaal}/10 + \text{Eventuele Huiswerkbonus}\}$$

Opgave 1: Dijkstra

1A) Beschouw een gericht netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$, waarbij het niet-negatieve getal c_{ij} de afstand geeft om van knooppunt N_i rechtstreeks naar knooppunt N_j te gaan. Formuleer in algemene termen op preciese wijze de labellingsprocedure van het algoritme van Dijkstra om het kortste pad te berekenen van een gegeven knooppunt N_s naar elk ander knooppunt.

1B) Veronderstel dat je in een gericht netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$ het meest veilige pad wil bepalen voor het verzenden van een boodschap van een gegeven knooppunt N_s naar een ander knooppunt N_e . De boodschap gaat verloren met kans p_{ij} wanneer de boodschap langs de verbinding van knooppunt N_i naar knooppunt N_j gezonden wordt. Hoe kun je dit probleem terugbrengen tot het standaard kortste-pad probleem van Dijkstra met 'afstanden' c_{ij} ?

Opgave 2: Branch & Bound

Beschouw het volgende knapzak probleem.

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_1 + 10x_2 + 9x_3 \\ \text{onder:} & 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 13 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ \textit{én geheel}} \end{array}$$

2A) Geef de oplossing van de LP Relaxatie van dit probleem [dat wil zeggen: geef de oplossing van het bovenstaande probleem als de geheeltalligheids-eis vervalt]. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde.

2B) Los het bovenstaande knapzak probleem op met behulp van Branch en Bound

Opgave 3: Geheeltallige Programmering

Het bedrijf *Dwars & Los* heeft vorige week 6 klussen binnengesleept die zo snel mogelijk moeten worden uitgevoerd door de 3 werknemers. Een klus kan slechts één keer worden geklaard en door één werknemer. Helaas is er te weinig tijd beschikbaar om alle klussen deze week te klaren. Het doel is nu om een werkrooster voor deze week te maken en de totale opbrengst van deze week te maximaliseren: als klus i uitgevoerd wordt, dan levert dat het bedrijf het bedrag c_i op [$i=1,\dots,6$]. Als werknemer j zich over klus i ontfermt dan neemt de klus een bepaalde tijd in beslag [zie tabel]. Ook is het zo dat niet iedereen full-time bij het bedrijf werkt en zo komt het dat iedere werknemer deze week slechts een bepaald aantal uren beschikbaar is [zie tabel]. Een werknemer mag echter meerdere klussen in de week uitvoeren. Wel is er vereist dat iedere werknemer *minstens* één klus klaart en dat elke werknemer onder het werk nog minstens 1 uur vrije tijd = (beschikbare tijd - tijd besteed aan klussen) overhoudt. Tenslotte kan klus 3 om technische redenen niet worden uitgevoerd als klussen 1 of 2 (of beiden) deze week worden geklaard. Directeuren Peter D. & David L. willen graag het werkrooster van aankomende week hebben waarbij de totale opbrengst zo groot mogelijk is.

	Klus 1	Klus 2	Klus 3	Klus 4	Klus 5	Klus 6	Beschikbare Tijd
Werknemer 1	2 uur	4 uur	7 uur	3 uur	6 uur	5 uur	5 uur
Werknemer 2	8 uur	3 uur	2 uur	7 uur	4 uur	1 uur	4 uur
Werknemer 3	5 uur	7 uur	3 uur	9 uur	1 uur	3 uur	2 uur

Formuleer dit probleem als een geheeltallig programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van uw gekozen beslissingsvariabelen aan!

Opgave 4: Dynamisch Programmeren

Het ziekenhuis *Sacred Heart* heeft N chirurgen in dienst. Elke chirurg heeft een eigen werkrooster. Deze week is het echter een zeer drukke week: er zijn namelijk M nieuwe patiënten aangekomen die allemaal geopereerd moeten worden. Chirurg j heeft nog tijd van t_j uur beschikbaar in zijn/haar rooster voordat er overwerk plaatsvindt [$j=1,\dots,N$]. De operatie van patiënt i neemt een tijd van T_i uur in beslag [$i=1,\dots,M$]. Het probleem is echter dat $\sum_{i=1}^M T_i > \sum_{j=1}^N t_j$: dus de totale tijd die de operaties van de M nieuwe patiënten bij elkaar in beslag nemen is veel groter dan het totaal aantal nog beschikbare uren van de chirurgen. Omdat alle operaties moeten plaatsvinden, zullen een aantal chirurgen moeten overwerken. Om de 'pijn' zo eerlijk mogelijk te verdelen besluit men de overuren zó te verdelen dat het grootste individuele aantal overuren minimaal is. Hoe moeten de patiënten op basis van dit criterium verdeeld worden over de verschillende chirurgen? Overigens is het mogelijk dat één chirurg meerdere patiënten onder zijn/haar hoede neemt maar een patiënt kan slechts aan één chirurg gekoppeld worden.

4A) Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie.

Z.O.Z.

4B) Beschouw opnieuw het bovenstaande probleem, maar nu met de extra eis dat er hoogstens R chirurgen belast mogen worden met de operaties van deze M nieuwe patiënten [met R een gegeven waarde en $R < N$]. Formuleer dit probleem nu als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf in ieder geval: de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie.

Aanwijzing: In het algemeen geldt: $\min_{A \subseteq S} \{g(S \setminus A)\} = \min \{ \min_{A \subseteq S, A \neq \emptyset} \{g(S \setminus A)\}, g(S) \}$

-Einde Tentamen-