

Hertentamen Inleiding Besliskunde I

10-2-2011, 18:30 - 21:15

REKENMACHINE ZONDER GEHEUGENOPSLAG IS TOEGESTAAN

Puntentoekenning

Dit tentamen bestaat uit 5 pagina's en uit 4 opgaven, waaruit 100 punten te behalen zijn.

Opgave	A	B	C	D	E	F
Opg. 1	10	10	-	-	-	-
Opg. 2	5	5	5	5	5	5
Opg. 3	12	8	-	-	-	-
Opg. 4	15	15	-	-	-	-

$$\text{Tentamen Cijfer} = \max\{1, \text{puntentotaal}/10\}$$

Opgave 1: Duale Probleem

Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\max z = 3x_2 + x_4 - 2w$$

onder

$$\begin{aligned}x_1 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 &\geq w \\x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 2 \\x_3 + x_4 &\leq 5 \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, w &\geq 0\end{aligned}$$

1A) Formuleer het duale probleem van het bovenstaande LP-probleem.

Beschouw vanaf nu het volgende LP-probleem, zeg **(P)**:

$$\begin{aligned}\max z &= 5.25 + 1.25x_1 + 0.75x_3 - 0.75x_4 \\ \text{onder} \quad 0.25x_1 + x_2 + 0.25x_3 + 0.25x_4 &= 1.75 \\ 2.5x_1 + 1.5x_3 - 0.5x_4 + x_5 &= 4.5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

1B) Het bovenstaande LP-probleem **(P)** staat in standaardvorm. De huidige basisvariabelen zijn (x_2, x_5) . Voer één simplex-iteratie uit en geef de oplossing die daarmee wordt verkregen. Is de verkregen oplossing optimaal? Zo ja, verklaar je antwoord en geef de optimale criteriumwaarde.

Z.O.Z.

Opgave 2: Gevoeligheidsanalyse

Staalbedrijf *Moe Soe Let* heeft een opdracht ontvangen voor het leveren van 100 ton van een speciaal staalsoort. Aan het staal zijn bepaalde eisen opgelegd: het staal moet tenminste 3.5 ton nikkel, tenhoogste 3 ton carbon en precies 4.5 ton mangaan bevatten. Het bedrijf ontvangt 1000 euro per ton van deze staalsoort. Om het staal te maken zijn vier legeringen in elke gewenste hoeveelheid ter beschikking. Voor elk van deze vier legeringen geven we in Tabel 1 de percentages nikkel, carbon en mangaan. De kostprijs van de vier legeringen $i = 1, 2, 3$ en 4 zijn respectievelijk 600, 500, 400 en 300 euro per ton. Definieren we voor $i = 1, \dots, 4$ de beslissingsvariabele x_i als het aantal ton van legering i dat gebruikt wordt om aan de order te voldoen tegen een maximale nettowinst dan wordt hieronder het LP-model met bijbehorende computeroutput gegeven.

	Legering 1	Legering 2	Legering 3	Legering 4
Nikkel	6%	3%	2%	1%
Carbon	3%	2%	5%	6%
Mangaan	8%	3%	2%	1%

Table 1: Gegevens

The following model was read:

Objective Function :

$$\text{MAX } 400.0000 \text{ X1} + 500.0000 \text{ X2} + 600.0000 \text{ X3} + 700.0000 \text{ X4}$$

Subject to :

1. $0.0600 \text{ X1} + 0.0300 \text{ X2} + 0.0200 \text{ X3} + 0.0100 \text{ X4} \geq 3.5000$
2. $0.0300 \text{ X1} + 0.0200 \text{ X2} + 0.0500 \text{ X3} + 0.0600 \text{ X4} \leq 3.0000$
3. $0.0800 \text{ X1} + 0.0300 \text{ X2} + 0.0200 \text{ X3} + 0.0100 \text{ X4} = 4.5000$
4. $1.0000 \text{ X1} + 1.0000 \text{ X2} + 1.0000 \text{ X3} + 1.0000 \text{ X4} = 100.0000$

Summary of Results

Value Objective Function : 49545.4545

Variable	Activity Level	Reduced Cost
X1	36.3636	0.0000
X2	47.7273	0.0000
X3	0.0000	36.3636
X4	15.9091	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
Constraint 1	0.2727	-0.0000
Constraint 2	0.0000	3636.3636
Constraint 3	0.0000	-2727.2727
Constraint 4	0.0000	509.0909

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
X1	400.0000	[0.0000 , Infinity]
X2	500.0000	[300.0000 , 614.2857]
X3	600.0000	[-Infinity , 636.3636]
X4	700.0000	[650.0000 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
1.	3.5000	[-Infinity , 3.7727]
2.	3.0000	[2.3000 , 4.5000]
3.	4.5000	[4.0714 , 8.0000]
4.	100.0000	[81.2500 , 150.0000]

2A) Geef de fysische interpretatie van de schaduwprijs y_4^* behorende bij de vierde bijvoorwaarde in de context van dit probleem.

2B) Wat is het effect op de optimale oplossing en de optimale netto winst als de kostprijs van 600 euro per ton van legering 1 zou toenemen tot een kostprijs van 750 euro.

2C) Wat is het effect op de netto winst als de eis van ten hoogste 3 ton carbon wordt aangescherpt tot de eis van ten hoogste 2.2 ton carbon?

2D) Wat gebeurt er met de netto winst als de eis van precies 4.5 ton mangaan zou worden vervangen door de eis van precies 4.55 ton mangaan?

2E) Wat is het effect op de optimale oplossing en optimale netto winst als de verkoopprijs per ton staal zou dalen van 1000 euro per ton naar 980 euro per ton?

2F) Stel dat ook legering 5 beschikbaar is. Voor deze legering zijn de percentages nikkel, carbon en mangaan gelijk aan 3%, 2% en 10%. Voor welke kostprijs van legering 5 wordt het interessant deze legering te gebruiken?

Opgave 3: Voorraadtheorie

Bij boekenwinkel van Jur vd S. is de vraag naar *Twilight* boeken maar liefst 30 stuks per maand, waarbij de vraag gelijkelijk over de tijd verspreid is. De boekenwinkel kan op elk moment besluiten de voorraad aan te vullen door een aanvulorder te plaatsen bij de uitgever. De levertijd van een aanvulorder is een halve maand, de vaste kosten van een aanvulorder zijn 50 euro en de inkoopkosten per exemplaar zijn 15 euro. De voorraadkosten van de boekenwinkel zijn op maandbasis 1% van de inkoopkosten van de

in voorraad zijnde hoeveelheid exemplaren. Bij een bestelling van 250 exemplaren of meer krijgt Jur een korting van 50%.

3A) Wat is de optimale bestelgrootte?

Hint: alle variabelen zijn nu op maandbasis, onder de kortingsstructuur worden de totale maandelijkse kosten gegeven door:

$$TK(Q) = \begin{cases} \frac{KD}{Q} + Dv + vr\frac{Q}{2} & \text{voor } 0 < Q < Q_b; \\ \frac{KD}{Q} + Dv(1-d) + v(1-d)r\frac{Q}{2} & \text{voor } Q \geq Q_b. \end{cases}$$

3B) Veronderstel nu dat er geen korting is en dat er alleen besteld kan worden in veelvoud van 60. Geef de definitie / interpretatie van het relatieve kostenpercentage en bepaal hiermee opnieuw de optimale bestelgrootte. Rond je antwoord(en) af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4: Formuleren

Kolencentrale Kardolus verwerkt twee steenkoolsoorten A en B om stoomenergie op te wekken. De steenkool wordt eerst verpulverd en daarna verbrand om stoomenergie op te wekken voor het aandrijven van stoomturbines. De vraag is in welke verhouding de steenkoolsoorten A en B verwerkt moeten worden opdat de productie van stoomenergie maximaal is gegeven een aantal beperkende voorwaarden. Zo zijn milieu-eisen opgelegd omtrent de gas- en roetuitstoot. De roetuitstoot mag hooguit 12 kg. per uur zijn, terwijl bij de gasuitstoot wordt geëist dat het aantal deeltjes zwavel per miljoen gasdeeltjes niet meer dan 3000 is. De verbranding van 1 ton kolensoort A geeft een roetuitstoot van 1 kg. per uur. De kolensoort A heeft de eigenschap dat op elke miljoen deeltjes die na verbranding van deze kolensoort vrijkomen er 1800 zwaveldeeltjes zijn, terwijl voor kolensoort B het aantal zwaveldeeltjes 38000 is op elke miljoen vrijgekomen gasdeeltjes. De kolensoorten A en B stoten per verbrande ton evenveel deeltjes uit. De kolensoorten worden per trein aangevoerd en de aanvoer van kolen is beperkt tot 20 ton per uur. De capaciteit van de verpulver-installatie van kolen is ook beperkt: de verpulvercapaciteit 16 ton kolensoort A per uur als A de enige zou zijn en is 24 ton kolensoort B per uur als B de enige zou zijn. Tenslotte levert 1 ton kolensoort A na verbranding 24000 pond stoomenergie op, voor 1 ton kolensoort B is dit 20000 pond.

4A) Formuleer het bovenstaande probleem als een lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van je gekozen beslissingsvariabelen aan.

Hint: Gebruik de volgende beslissingsvariabelen:

$$x_j = \text{aantal ton van steenkoolsoort } j \text{ dat per uur wordt verbrand. } j \in \{A, B\}$$

Het bedrijf 'Altijd Alles Op Tijd' [vanaf nu: AAOT] moet voor de komende n maanden een inkoop- en productieplan ontwerpen voor een populair product. De vraag naar dit product is bij AAOT bekend: in maand j is de vraag gelijk aan V_j [$j = 1, \dots, n$]. AAOT kan in maand j hoogstens C_j producten maken en we nemen uiteraard aan dat voor alle $k = 1, \dots, n$ geldt dat $\sum_{j=1}^k C_j \geq \sum_{j=1}^k V_j$ omdat anders nooit aan alle vraag op tijd zal kunnen worden voldaan. Voor de productie zijn m verschillende grondstoffen nodig. De

inkoopprijzen van de grondstoffen zijn niet in alle maanden gelijk, maar wel al aan het begin van maand 1 bekend voor alle komende n maanden. In maand j kost één eenheid van grondstof i een bedrag b_{ij} . Het maken van één product vereist een hoeveelheid a_i van grondstof i [$i = 1, \dots, m$]. De productiekosten zijn ook afhankelijk van de maand waarin geproduceerd wordt: in maand j bedragen de productiekosten p_j per product. Grondstoffen kunnen altijd in onbeperkte hoeveelheden worden ingekocht aan het begin van de maand en nog in dezelfde maand voor de productie gebruikt worden. Alle eenmaal ingekochte grondstoffen blijven tot de laatste maand bruikbaar. Aan de vraag V_j hoeft pas aan het eind van maand j voldaan te worden, dus producten gemaakt in maand j kunnen gebruikt worden om te voldoen aan de vraag in maand j .

Vanwege wisselende inkoopprijzen [van de grondstoffen] en productiekosten, alsmede de maandafhankelijke productiecapaciteit, vraagt AAOT zich af in hoeverre het aan te bevelen is grondstoffen eerder in te kopen en producten vooruit te produceren. De grondstoffen die niet onmiddellijk gebruikt worden moeten wel worden opgeslagen voor een bedrag h_i per maand per eenheid van grondstof i . Het opslaan van één eenheid grondstof i vereist een oppervlakte γ_i en voor de totale opslag van de grondstoffen is altijd hoogstens een oppervlakte Γ beschikbaar. Nieuw ingekochte grondstoffen hoeven de eerste maand niet te worden opgeslagen. Een product dat moet worden opgeslagen omdat het niet wordt geleverd in dezelfde maand als waarin het geproduceerd is, vereist opslagkosten K per maand dat het opgeslagen wordt. Er is onbeperkte opslagruimte voor reeds geproduceerde maar nog niet geleverde producten. AAOT moet op tijd aan alle vraag voldoen. Het bedrijf vraagt zich daarom af wat het optimale inkoop- en productiebeleid is waarvoor de totale kosten voor de komende n maanden minimaal zullen zijn.

4B) Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van je gekozen beslissingsvariabelen aan.

Hint: introduceer de volgende beslissingsvariabelen voor $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$:

x_j = aantal producten te produceren in maand j .

u_{ij} = aantal eenheden van grondstof i in te kopen in maand j .

y_j = aantal producten op voorraad [d.w.z. wel geproduceerd maar nog niet geleverd] aan het eind van maand j .

w_{ij} = aantal eenheden van grondstof i op voorraad aan het eind van maand j .

-Einde Tentamen-