

Tentamen Inleiding Besliskunde I

20-12-2010, 15:15 - 18:00

REKENMACHINE ZONDER GEHEUGENOPSLAG IS TOEGESTAAN

Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 5 pagina's en uit 4 opgaven, waaruit 100 punten te behalen zijn.

Opgave	A	B	C	D	E
Opg. 1	15	5	-	-	-
Opg. 2	5	5	5	5	5
Opg. 3	10	15	-	-	-
Opg. 4	15	15	-	-	-

$$\text{Tentamen Cijfer} = \max\{1, \text{puntentotaal}/10\}$$

Opgave 1: Duale Probleem

Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\min z = x_2 + 2x_4 + v$$

onder

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &\leq 1 \\8x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= v \\-2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 2v - 80 \\x_1 - x_2 - x_3 &\geq 40 - v\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, v \geq 0$$

1A) Formuleer het duale probleem van het bovenstaande LP-probleem. *Let op: er staat minimaliseer!*

Beschouw vanaf nu het volgende LP-probleem, zeg (P):

$$\max z = v$$

onder $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - v \leq 0.5$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + v \leq 1$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0.1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, v \geq 0$$

1B) Kunnen in een optimale oplossing van het bovenstaande LP probleem (P) die met de simplex methode verkregen en dus een toegelaten hoekpunt is, de optimale waarden van alle beslissingsvariabelen positief zijn? Zo niet, **hoogstens** hoeveel beslissingsvariabelen kunnen dan in dit optimale toegelaten hoekpunt van het bovenstaande probleem [= de optimale oplossing gevonden met behulp van de simplex methode] een positieve waarde aannemen? Licht je antwoord toe.

Opgave 2: Gevoeligheidsanalyse

Ordeman N.V. heeft een contract getekend om 2000 trucks te produceren. Voor de productie heeft het bedrijf 4 locaties ter beschikking. Vanwege lokale omstandigheden zijn de kosten voor het produceren van een truck verschillend per locatie. De benodigde arbeidskracht en het benodigde materiaal voor het maken van een truck is ook verschillend per locatie. Deze gegevens betreffende de productie van een truck staan in de volgende tabel:

Locatie	Kosten (in 1000 euro)	Arbeidsuren	Eenheden Materiaal
1	10	4	3
2	7	3	8
3	9	6	4
4	3	9	5

Voor de vier productielocaties tezamen zijn in totaal 9000 arbeidsuren ter beschikking en 10000 eenheden materiaal. De vakbond heeft in het contract geeist dat tenminste 50 trucks worden geproduceerd op locatie 1 en tenminste 600 trucks op locaties 3 en 4 tezamen. De computer uitvoer voor dit probleem wordt hieronder gegeven. Gebruik deze uitvoer om een beargumenteerd antwoord te geven op de volgende vragen:

Objective Function :

MIN 10.0000 X1 +7.0000 X2 +9.0000 X3 +3.0000 X4

Subject to :

1. 4.0000 X1 +3.0000 X2 +6.0000 X3 +9.0000 X4 <= 9000.0000
2. 3.0000 X1 +8.0000 X2 +4.0000 X3 +5.0000 X4 <= 10000.0000
3. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 2000.0000
4. 1.0000 X1 >= 50.0000
5. 1.0000 X3 +1.0000 X4 >= 600.0000

Summary of Results

Value Objective Function : 16550.0000

Variable	Activity Level	Reduced Cost
X1	750.0000	0.0000
X2	650.0000	0.0000
X3	450.0000	0.0000
X4	150.0000	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
Constraint 1	0.0000	-1.6875
Constraint 2	0.0000	-0.9375
Constraint 3	0.0000	19.5625
Constraint 4	700.0000	0.0000
Constraint 5	0.0000	3.3125

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
X1	10.0000	[5.0000 , 13.5333]
X2	7.0000	[-20.0000 , 12.0000]
X3	9.0000	[7.0370 , Infinity]
X4	3.0000	[-Infinity , 7.8182]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
1.	9000.0000	[8520.0000 , 10440.0000]
2.	10000.0000	[7600.0000 , 13733.3333]
3.	2000.0000	[1686.9565 , 2104.3478]
4.	50.0000	[-Infinity , 750.0000]
5.	600.0000	[333.3333 , 818.1818]

2A) Geef de fysische interpretatie van de schaduwprijs y_5^* behorende bij de vijfde bijvoorwaarde in de context van dit truck-productie probleem en deze specifieke bijvoorwaarde.

2B) Wat zou er met de minimale kosten gebeuren als we 11000 arbeidsuren beschikbaar zouden hebben? Motiveer je antwoord.

2C) Stel dat de eis dat op locatie 1 minstens 50 trucks geproduceerd moeten worden zou vervallen, echter daar tegenover zouden we dan wel minstens 700 trucks moeten produceren op locaties 3 en 4 tezamen. Geef aan hoe de optimale criteriumwaarde en de minimale kosten dan veranderen. Motiveer je antwoord.

2D) Stel dat op locatie 1 de productie kosten 11000 per truck zouden zijn, op locatie 2 de productie kosten 6000 per truck zouden zijn en op locatie 3 de productie kosten 8500 per truck zouden zijn. Kun je een conclusie trekken over de (mogelijke) verandering van de optimale oplossing? Zo ja, geef dan ook aan hoe de minimale kosten veranderen. Motiveer je antwoord.

2E) Stel dat ook nog een locatie 5 voor productie ter beschikking blijkt te zijn. Op deze locatie zijn voor een truck de productiekosten gelijk aan 5000 euro en er zijn 4 arbeidsuren en 5 eenheden materiaal nodig voor de productie van een truck. Is het zinvol deze locatie te gebruiken in de optimale oplossing? Motiveer je antwoord.

Z.O.Z.

Opgave 3: Voorraadtheorie

Naast de nodige aannames worden de basiselementen van de EOQ model gegeven door:

- K = de vaste bestelkosten voor het plaatsen van een order
- v = de inkoopprijs per eenheid product
- r = rentefactor op jaarbasis zodanig dat vr de voorraadkosten zijn voor het in voorraad houden van één eenheid gedurende één jaar
- D = de jaarlijkse vraag naar het product
- $\frac{Q}{2}vr$ = de jaarlijkse voorraadkosten
- $TK(Q)$ = totale jaarlijkse kosten afhankelijk van de bestelgrootte Q

Het is duidelijk dat $TK(Q) = \frac{D}{Q}K + Dv + \frac{Q}{2}vr$.

3A) Leid de optimale bestelgrootte Q^* af en toon aan dat $TK(Q)$ inderdaad geminimaliseerd wordt bij deze Q^* . Geef ook de optimale bestelfrequentie per jaar!

Bij boekenwinkel van Bastiaan K. is de vraag naar *Hairy Plotter* boeken 400 stuks per maand, waarbij de vraag gelijkelijk over de tijd verspreid is. De boekenwinkel kan op elk moment besluiten de voorraad aan te vullen door een aanvulorder te plaatsen bij de uitgever. De levertijd van een aanvulorder is een halve maand, de vaste kosten van een aanvulorder zijn 100 euro en de inkoopkosten per exemplaar zijn 15 euro. De voorraadkosten van de boekenwinkel zijn op maandbasis 10% van de inkoopkosten van de in voorraad zijnde hoeveelheid exemplaren. Bij een bestelling van 300 exemplaren of meer krijgt Bastiaan een korting 20%.

3B) Wat is de optimale bestelgrootte?

Hint: alle variabelen zijn nu op maandbasis, onder de kortingsstructuur worden de totale maandelijks kosten gegeven door:

$$TK(Q) = \begin{cases} \frac{KD}{Q} + Dv + vr\frac{Q}{2} & \text{voor } 0 < Q < Q_b; \\ \frac{KD}{Q} + Dv(1-d) + v(1-d)r\frac{Q}{2} & \text{voor } Q \geq Q_b. \end{cases}$$

Opgave 4: Formuleren

Marjolein E. en Ruben L. spelen samen een spel. Marjolein heeft de beschikking over M kaarten en Ruben heeft de beschikking over N kleuren. Marjolein kiest een kaart zonder dat Ruben het ziet en Ruben kiest een kleur zonder dat Marjolein het ziet. Vervolgens maken beide spelers tegelijk hun keuze bekend. De uitbetaling voor de spelers hangt af van de gekozen kaart en gekozen kleur. Als Marjolein kaart i heeft gekozen en Ruben kleur j dan is de uitbetaling voor Marjolein q_{ij} euro [$i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$]. Veronderstel dat dit spel heel vaak gespeeld gaat worden, Ruben vraagt zich af welke gemengde strategie hij moet volgen opdat hij op lange termijn de grootst mogelijke gemiddelde [verwachte] uitbetaling per spel aan Marjolein minimaliseert ongeacht haar strategie.

Z.O.Z.

4A) Formuleer het bovenstaande probleem van Ruben als een lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van je gekozen beslissingsvariabelen aan.

Hint: Stel eerst een uitbetalingstabel op voor Marjolein. Als Marjolein kaart i kiest, wat is dan de verwachte winst voor Marjolein onder de gemengde strategie van Ruben?

Kardolus Airlines vliegt continu de volgende route: L.A. - Houston - New York - Miami - L.A. De afstand (in mijlen) van elk segment van deze route is weergegeven in de volgende tabel.

Segment	Afstand
Los Angeles - Houston	1500
Houston - New York	1700
New York - Miami	1300
Miami - Los Angeles.	2700

Bij elke stop kan het vliegtuig hoogstens 10.000 gallons kerosine bijtanken. De prijzen per gallon (in dollars) zijn in de verschillende steden als volgt.

Stad	Prijs per gallon
Los Angeles	\$ 0.88
Houston	\$ 0.15
New York	\$ 1.05
Miami	\$ 0.95

De tank van het vliegtuig kan hoogstens 12000 gallons kerosine bevatten. We eisen dat bij **aankomst** in een stad de tank altijd nog minstens 600 gallons bevat om eventueel rondcirkelen boven het vliegveld mogelijk te maken. Het aantal gallons dat **per mijl** op elk segment van de route verbruikt wordt, wordt gegeven door:

$$1 + (\text{gemiddeld kerosine niveau op segment} / 2000)$$

waarbij het gemiddeld kerosine niveau (in gallons) op een segment gelijk is aan:

$$\frac{(\text{kerosine niveau bij start segment}) + (\text{kerosine niveau bij eind segment})}{2}$$

Het doel is de totale tank-kosten te minimaliseren van de route. Je mag er vanuit gaan dat het vliegtuig direct weer dezelfde route blijft vliegen zodra deze weer in Los Angeles aankomt.

4B) Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van je gekozen beslissingsvariabelen aan.

Hint: Gebruik onder andere de volgende beslissingsvariabelen:

$$x_j = \# \text{ gallons in de tank van het vliegtuig bij } \textbf{vertrek} \text{ uit stad } j. \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

-Einde Tentamen-