

Tentamen Inleiding Besliskunde, 18-12-2008
REKENMACHINE IS NIET TOEGESTAAN

Puntentoekenning:

opgave 1(a) 10, (b) 10, (c) 5
opgave 2(a)-(e), elk onderdeel 4
opgave 3(a) 10, (b) 5, (c) 10
opgave 4(a) 10, (b) 10
Maximaal totaal 90 punten.

Eindcijfer

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10} \quad (\text{plus eventueel bonus 0.5 punt}).$$

Opgave 1. (1(a) 10 punten, 1(b) 10 punten, 1(c) 5 punten).
Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\begin{aligned} \max \quad Z &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ &x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de standaard basisvorm. Geef de startoplossing voor de simplex-algoritme en pas **één** iteratie toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te vinden. Geef op overzichtelijke en beargumenteerde wijze aan hoe u deze verbeterde basisoplossing construeert en wat de bijbehorende basisvorm van het LP-probleem is.
- (b). Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde? Hoe kun je van de nieuwe basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dit hier het geval?
- (c). Formuleer van het LP-probleem het duale LP-probleem. Wat kun je zeggen over de minimale criteriumwaarde van het duale probleem op basis van je uitkomst van vraag (b)?

Opgave 2 (Elk van de 5 onderdelen 4 punten)

De ijsmaker Peppino produceert vier soorten verpakt ijs in in pakjes met verschillende verhoudingen van de drie basisingrediënten melk, suiker en vruchten. De volgende tabel geeft van elk pakje de benodigde hoeveelheden van deze basisingrediënten en de prijs waarvoor Peppino ze verkoopt. Daarnaast staat in de tabel hoeveel er per dag beschikbaar is aan deze basisingrediënten.

	soort 1	soort 2	soort 3	soort 4	beschikbaar
melk	15 ml	20 ml	25 ml	30 ml	12000 ml
suiker	15 gr	10 gr	20 gr	15 gr	10000 gr
vruchten	25 gr	15 gr	10 gr	5 gr	8000 gr
prijs	€ 5	€ 4.5	€ 5.5	€ 3.5	

Om bij de beschikbare hoeveelheden basisingrediënten dagelijks zoveel van elk ijssoort te produceren dat de totale inkomsten maximaal zijn, lost Peppino het volgende LP-probleem op:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4.5x_2 + 5.5x_3 + 3.5x_4 \\ \text{onder} \quad & 1. \quad 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 30x_4 \leq 12000 \\ & 2. \quad 15x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 15x_4 \leq 10000 \\ & 3. \quad 25x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 8000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

NB1: er hoeft geen rekening gehouden te worden met de inkoopkosten van de ingrediënten.
NB2: oplossingen mogen fractioneel zijn.

De computeruitvoer van ORSTAT2000 staat hieronder.

SIMOPT Version 2.1

IEOR VU Amsterdam

The following model was read:

Objective Function :

$$\text{MAX } 5.0000 \text{ X1} + 4.5000 \text{ X2} + 5.5000 \text{ X3} + 3.5000 \text{ X4}$$

Subject to :

$$\begin{aligned} 1. \quad & 15.0000 \text{ X1} + 20.0000 \text{ X2} + 25.0000 \text{ X3} + 30.0000 \text{ X4} \leq 12000.0000 \\ 2. \quad & 15.0000 \text{ X1} + 10.0000 \text{ X2} + 20.0000 \text{ X3} + 15.0000 \text{ X4} \leq 10000.0000 \\ 3. \quad & 25.0000 \text{ X1} + 15.0000 \text{ X2} + 10.0000 \text{ X3} + 5.0000 \text{ X4} \leq 8000.0000 \end{aligned}$$

Summary of Results

Value Objective Function : 2918.5185

Variable	Activity Level	Reduced Cost
X1	162.9630	0.0000
X2	14.8148	0.0000
X3	370.3704	0.0000
X4	0.0000	1.8889

	Slack of Surplus	Shadow prices
	-----	-----
Constraint 1	0.0000	0.1296
Constraint 2	0.0000	0.0741
Constraint 3	0.0000	0.0778

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	5.0000	[3.5714 , 7.1875]
X2	4.5000	[3.2500 , 5.0263]
X3	5.5000	[4.5909 , 7.2500]
X4	3.5000	[-Infinity , 5.3889]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	---	-----
1.	12000.0000	[11857.1429 , 14750.0000]
2.	10000.0000	[6857.1429 , 10105.2632]
3.	8000.0000	[7333.3333 , 16333.3333]

Geef een **beargumenteerd** antwoord op de volgende vragen.

- Wat is de oplossing van LP probleem en hoeveel bedragen de dagelijkse inkomsten?
- Stel dat Peppino besluit om de prijs van ijssoort 1 te verhogen tot € 7 per pakje. Zou de optimale oplossing veranderen? Zo nee, hoeveel meer inkomsten per dag zijn er dan?
- Stel dat er dagelijks slechts 7500 gram vruchten beschikbaar zijn, (in plaats van 8000 gram). Nemen de dagelijkse inkomsten dan toe of af? Met hoeveel? Wat kun je zeggen over de toe- of afname van de inkomsten als er dagelijks slechts 7000 gram vruchten beschikbaar zijn?
- Wat gebeurt er met de optimale oplossing als er 10% meer melk en 10% meer vruchten beschikbaar zijn?
- Peppino overweegt een vijfde ijssoort te produceren bestaande uit 20 ml melk, 20 gr suiker en 20 gr vruchten per pakje. Bij welke prijs per pakje wordt het interessant om deze soort te produceren?

Opgave 3 (3(a) 10 punten, 3(b) 5 punten, 3(c) 10 punten).

De Oudhollandsche Backerij van Piet Commandeur, gevestigd in Heerhugowaard, is wijd en zijd bekend om zijn boterkoekjes. Om aan de vraag naar deze koekjes te voldoen is dagelijks 40 pond boter nodig die Commandeur betreft van de provinciale groothandel Rogigo. Per bestelling rekent Rogigo € 30 aan administratieve kosten terwijl de inkoop-prijs van boter € 1,50 is per pond. De levertijd van Rogigo is 2 dagen. Tenslotte schat Commandeur in dat de voorraadkosten van boter dagelijks 4% zijn over de inkoop-prijs. Piet Commandeur wil de totale kosten per dag minimaliseren onder de restrictie dat hij altijd aan de vraag naar de boterkoekjes kan voldoen.

- (a). Welk voorraadmodel is hier van toepassing? Hoe luidt de formule voor de optimale bestelgrootte? Definieer hierin alle parameters. Bereken met deze formule de bestelgrootte voor Commandeur.
- (b). Veronderstel dat Rogigo een korting geeft van 20 % op de inkoop-prijs als Commandeur minstens 220 pond per keer besteld. Wat is nu de optimale bestelgrootte?
- (c). Iedere eerste week van augustus is er kermis in Heerhugowaard en de enorme toeloop doet de plaatselijke Albert Heijn besluiten ook boterkoekjes te verkopen. Albert Heijn koopt de kant-en-klare koekjes bij Commandeur die daardoor zo veel meer moet bakken dat hij weet dat hij de volgende hoeveelheden boter nodig heeft in die dagen (inclusief de dagelijkse 40 pond):

1 aug	2 aug	3 aug	4 aug	5 aug	6 aug
120	100	200	150	125	120

Beschrijf eerst in algemene termen de heuristiek van Silver-Meal om een goede (sub-optimale) oplossing te vinden voor dit type probleem. Bereken met deze heuristiek een bestelstrategie voor Piet Commandeur.

Opgave 4 (4(a) 10 punten, 4(b) 10 punten)

(a). Een petro-chemische producent maakt drie goederen I, II en III, die ieder uit twee ruwe materialen A en B gemaakt worden. Per eenheid product van Product I zijn 2 eenheden van A en 4 van B nodig. Per eenheid product van Product II zijn 3 eenheden van A en 2 van B nodig. Per eenheid product van Product III zijn 5 eenheden van A en 7 van B nodig. In totaal zijn er 4000 eenheden van ruw materiaal A beschikbaar en 6000 van ruw materiaal B. Gegeven is dat er minstens 200 eenheden van Product I gemaakt moeten worden, minstens 200 van Product II en minstens 150 van Product III. De winst per eenheid is voor Product I 30, voor Product II 20 en voor Product III 50.

Formuleer het probleem van het vinden van de oplossing die de totale winst maximaliseert als een Lineair Programmerings probleem. Je mag aannemen dat eventueel fractionele hoeveelheden zijn toegestaan (aantal eenheden van de producten hoeft dus niet geheel-tal-ig te zijn).

(b). Een grote staalfabriek wordt geconfronteerd met een nieuwe milieuwetgeving. De drie belangrijkste typen vervuiling die de staalfabriek veroorzaakt zijn stofdeeltjes, zwaveloxide en hydrocarbonaten. De nieuwe standaarden vereisen dat de fabriek de jaarlijkse emissie van deze afvalstoffen terug brengt met de volgende bedragen in miljoenen kilo's.

Stofdeeltjes	60
Zwaveloxide	150
Hydrocarbonaten	125

De fabriek bevat hoofdzakelijk twee vervuilingsbronnen: de hete lucht ovens (HLO) en de open haard ovens (OHO).

Ingenieurs hebben de meest effectieve typen methoden vastgesteld waarmee de gevraagde reductie tot stand gebracht kan worden. Dit zijn (1) het verhogen van de schoorsteenpijpen, (2) het gebruik van filters en (3) het gebruik van betere brandstoffen in de ovens. Voor elk van deze methoden geldt een zekere technologische limiet op hun gebruik. In de volgende tabel staat hoeveel miljoenen kilo per jaar gereduceerd kan worden voor beide typen ovens, per afvalstof en per methode als deze op zijn maximale technologische limiet gebruikt wordt.

	Schoor stenen		Fil- ters		Betere brandst.	
Afvalstoffen	HLO	OHO	HLO	OHO	HLO	OHO
Stofdeeltjes	12	9	25	20	17	13
Zwavedioxide	35	42	18	31	56	49
Hydrocarbon.	37	53	28	24	29	20

De methoden kunnen ook voor een fractie van de maximale limiet worden aangewend. Deze fracties kunnen bovendien verschillend zijn voor HLO en OHO. De aanwending van de ene methode heeft geen effect op de werking van een andere methode.

Aan de toepassing van een methode zijn kosten verbonden. Deze zijn verschillend bij toepassing op de twee oven typen. In de onderstaande tabel staan de kosten vermeld voor de verschillende methoden uitgesplitst over de twee oven typen. De kosten zijn op jaarbasis en gegeven in miljoenen euro bij gebruik van de methoden op hun maximale technologische limiet.

Methode	HLO	OHO
Schoorstenen	8	10
Filters	7	6
Betere brandst.	11	9

De kosten zijn lineair in de fractie van de maximale limiet waarop de methode gebruikt wordt. Dus als de methode Schoorstenen bij HLO op maximale limiet wordt toegepast kost dat $1 \cdot 8$ (miljoen euro), en als hij op de helft ervan gebruikt wordt dan kost dat $0.5 \cdot 8 = 4$ (miljoen euro)

Gegeven deze data moet nu een plan uitgewerkt worden om de voorgeschreven reductie in afvalstoffen te bewerkstelligen en dat te doen tegen zo gering mogelijke kosten op jaarbasis. Formuleer dit probleem als een Lineair Programmerings probleem.