

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE BWI
12 februari 2008, 18.30 - 21.15 uur

Opgave 1. Beschouw het LP-probleem

$$\begin{array}{ll}\max & 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{onder} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de basisvorm door verschilvariabelen toe te voegen. Geef een startoplossing voor het LP-probleem in basisvorm. één iteratie van de simplex-methode toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Licht op duidelijke wijze de keuzetoe die je doet om de verbeterde basisoplossing te berekenen. Geef samengevat de basisvorm van het LP-probleem behorende bij de verbeterde basisoplossing. Wat is de verbeterde oplossing en wat is de bijbehorende criteriumwaarde?
- (b). Hoe kun je uit de nieuwe basisvorm zien of de verbeterde oplossing nog verder verbeterd kan worden? Zouden in de uiteindelijke optimale basisoplossing alle drie de variabelen x_1, x_2, x_3 een positieve waarde kunnen hebben? Licht uw antwoord toe
- (c). Formuleer het duale LP-probleem. Wat kun je zeggen van de optimale criteriumwaarde van het duale LP-probleem: is dit kleiner dan 7.5 of tenminste 7.5? Licht uw antwoord toe.

Opgave 2. Een staalbedrijf heeft een opdracht ontvangen voor het leveren van 100 ton van een speciaal staalsoort. Aan het staal zijn bepaalde eisen opgelegd: het staal moet tenminste 3.5 ton nikkel, ten hoogste 3 ton carbon en precies 4.5 ton mangaan bevatten. Het bedrijf ontvangt € 1000 per ton van deze staalsoort. Om het staal te maken zijn vier legeringen in elke gewenste hoeveelheid ter beschikking. Voor elk van deze vier legeringen geven we in onderstaande tabel de percentages nikkel, carbon en mangaan. De kostprijs van de vier legeringen $i = 1, 2, 3$ en 4 zijn respectievelijk € 600, 500, 400 en 300 per ton. Voor $i = 1, \dots, 4$ wordt de beslissingsvariabele x_i gedefinieerd

als het aantal ton van legering i dat gebruikt wordt om aan de order te voldoen.

	legering 1	legering 2	legering 3	legering 4
nikkel	6%	3%	2%	1%
carbon	3%	2%	5%	6%
mangaan	8%	3%	1%	1%

Het LP-model en computeroutput worden gegeven door

Objective Function :

MAX 400.0000 X1 +500.0000 X2 +600.0000 X3 +700.0000 X4

Subject to :

1. 0.0600 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 $\geq$ 3.5000

{nikkel}

2. 0.0300 X1 +0.0200 X2 +0.0500 X3 +0.0600 X4 $\leq$ 3.0000

{carbon}

3. 0.0800 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 = 4.5000

{mangaan}

4. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 100.0000

{ordergrootte}

Summary of Results

Value Objective Function : 49545.4545

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	36.3636	0.0000
X2 :	47.7273	0.0000
X3 :	0.0000	36.3636
X4 :	15.9091	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
-----	-----	-----
Constraint 1	0.2727	-0.0000
Constraint 2	0.0000	3636.3636
Constraint 3	0.0000	-2727.2727
Constraint 4	0.0000	509.0909

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
X1	400.0000	[0.0000 , Infinity]
X2	500.0000	[300.0000 , 614.2857]
X3	600.0000	[-Infinity , 636.3636]
X4	700.0000	[650.0000 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
1.	3.5000	[-Infinity , 3.7727]
2.	3.0000	[2.3000 , 4.5000]
3.	4.5000	[4.0714 , 8.0000]
4.	100.0000	[81.2500 , 150.0000]

Beantwoord vervolgens de volgende vragen:

- Wat is de fysische betekenis van de schaduwprijs bij voorwaarde 4?
- Wat is het effect op de optimale oplossing als de kostprijs van € 600 per ton van legering 1 zou toenemen tot een kostprijs van € 750?
- Wat is het effect op de netto winst als de eis van ten hoogste 3 ton carbon wordt aangescherpt tot de eis van ten hoogste 2.95 ton carbon en wat is het effect bij aanscherping tot hooguit 2.2 ton carbon?
- Wat gebeurt er met de netto winst als de eis van precies 4.5 ton mangaan zou worden vervangen door de eis van precies 4.55 ton mangaan?
- Stel dat ook legering 5 beschikbaar is. Voor deze legering zijn de percentages nikkel, carbon en mangaan gelijk aan 3%, 2% en 10%. Voor welke kostprijs van legering 5 wordt het interessant deze legering te gebruiken?

Opgave 3. Het bedrijf Jones Chemical heeft een contract gesloten om een speciaal soort zwavelzuur af te leveren in de komende zes maanden. De overeenkomst behelst de levering van 100 ton van het zwavelzuur op 1 januari, 75 ton op 1 februari, 90 ton op 1 maart, 60 ton op 1 april, 40 ton op 1

mei en 85 ton op 1 juni. De productie van het zwavelzuur vereist enkele speciale maatregelen. De productiemanager heeft daarom besloten dat het zwavelzuur alleen geproduceerd kan worden op de eerste dag van de maand. Elke productie neemt een verwaarloosbare hoeveelheid tijd in beslag. De vaste opstartkosten van een productie bedragen 500 euro. Iedere keer kan elke gewenste hoeveelheid van het zwavelzuur geproduceerd worden. Het bedrijf heeft voldoende opslagcapaciteit voor het zwavelzuur, maar voor elke ton zwavelzuur in voorraad gedurende een maand bedragen de voorraadkosten 4 euro voor die maand. Op dit moment is geen voorraad van het product aanwezig.

- (a). Formuleer een geheeltallig LP-model voor de bepaling van een productieschema waarvoor de totale kosten minimaal zijn. Geef duidelijk de betekenis van uw gekozen beslissingsvariabelen aan!
- (b). Pas de Silver-Meal heuristiek toe op het probleem.

Opgave 4. Een vliegtuig moet een vlucht uitvoeren van beginpunt A naar eindpunt G . Een tweetal tussenlandingen dient gemaakt te worden. De eerste tussenlanding is in één van de steden B , C of D , terwijl de tweede tussenlanding plaatsvindt in één van de steden E of F . De directe vlucht van punt A naar de punt B heeft een gegeven tijdsduur c_{AB} , de directe vlucht van A naar C heeft een tijdsduur c_{AC} , etc, dus in generieke notatie een directe vlucht van P naar Q heeft tijdsduur c_{PQ} . Voor elk van de volgende twee optimaliteitscriteria laat zien hoe je met dynamische programmering te werk gaat om de optimale oplossing te bepalen, dwz voor elk van deze twee criteria definieer zorgvuldig een waardefunctie en stel de recursierelatie op en geef aan hoe de berekeningen in de recursie relatie begint.

- (a). Je wilt de route van A naar G bepalen waarvoor de totale tijdsduur minimaal is.
- (b). Je wilt de route van A naar G bepalen waarvoor de tijdsduur van de langste vlucht zo klein mogelijk is.

Opgave 5.

- (a). Beschouw een gericht netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$, waarbij het niet-negatieve getal c_{ij} de afstand geeft om knooppunt N_i rechtstreeks naar knooppunt N_j te gaan. Formuleer in algemene termen op preciese wijze de labellingprocedure van het algoritme van Dijkstra om een kortste pad te bereken van een gegeven knooppunt N_s naar elk ander knooppunt.

- (b). Veronderstel dat je in een gericht netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$ het meest veilige pad wil bepalen voor het verzenden van een boodschap van een gegeven knooppunt N_s naar een ander knooppunt N_e voor de situatie dat de boodschap verloren gaat met kans p_{ij} wanneer de boodschap langs de verbinding van knooppunt N_i naar knooppunt N_j gezonden wordt. Hoe kun je dit probleem terugbrengen tot het standaard kortste-pad probleem van Dijkstra met "afstanden" c_{ij} ?
- (c). Vloeistof moet via één of meer van de vijf tanks A, B, C, D en E worden overgepompt worden van tank A naar tank E . Een gegeven percentage v_{XY} van de vloeistof gaat verloren als deze rechtstreeks van tank X naar tank Y wordt overgepompt. Het probleem is hoe de vloeistof over te pompen met zo weinig mogelijk verlies. Hoe kun je dit probleem terugbrengen tot het standaard kortste-pad probleem van Dijkstra met "afstanden" c_{ij} ?

Puntentoekening: elke opgave 18 punten

opgave 1(a) 10 punten, 1(b) en 1(c) elk 5 punten,
 opgave 2(a), 2(b), 2(c), 2(d) en 2(e) elk 5 punten,
 opgave 3(a), 3(b) elk 10 punten,
 opgave 4(a), 4(b) elk 10 punten
 opgave 5(a) 10 punten 5(b) en 5(c) elk 5 punten,

Eindcijfer: $\frac{\text{totale aantal punten}}{10}$.