

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE BWI
6 februari 2007, 18.30 - 21.15 uur

Opgave 1.

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{array}{ll}\max & 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{onder} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de basisvorm door verschilvariabelen toe te voegen. Geef een startoplossing voor het LP-probleem in basisvorm en pas één iteratie van de simplex-methode toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Geef een duidelijke toelichting op uw berekeningen en geef een overzichtelijke samenvatting van de basisvorm behorende bij de verbeterde basisoplossing. Zouden in een optimale basisoplossing alle drie de variabelen een positieve waarde kunnen hebben?
- (b). Geef van het bovenstaande LP-probleem in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem. Wat kun je zeggen van de optimale criteriumwaarde van het duale LP-probleem als je zou weten dat het bovenstaande LP-probleem de maximale criteriumwaarde 12 heeft?

Opgave 2.

Een staalbedrijf heeft een opdracht ontvangen voor het leveren van 100 ton van een speciaal staalsoort. Aan het staal zijn bepaalde eisen opgelegd: het staal moet tenminste 3.5 ton nikkel, ten hoogste 3 ton carbon en precies 4.5 ton mangaan bevatten. Het bedrijf ontvangt € 1000 per ton van deze staalsoort. Om het staal te maken zijn vier legeringen in elke gewenste hoeveelheid ter beschikking. Voor elk van deze vier legeringen geven we in onderstaande tabel de percentages nikkel, carbon en mangaan. De kostprijs van de vier legeringen $i = 1, 2, 3$ en 4 zijn respectievelijk € 600, 500, 400 en 300 per ton.

MAX 400.0000 X1 +500.0000 X2 +600.0000 X3 +700.0000 X4
 Subject to :
 1. 0.0600 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 >= 3.5000
 2. 0.0300 X1 +0.0200 X2 +0.0500 X3 +0.0600 X4 <= 3.0000
 3. 0.0800 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 = 4.5000
 4. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 100.0000

Summary of Results:

Value Objective Function : 49545.4545

Variable	Activity Level	Reduced Cost
X1	36.3636	0.0000
X2	47.7273	0.0000
X3	0.0000	36.3636
X4	15.9091	0.0000
	Slack of Surplus	Shadow prices
Constraint 1	0.2727	-0.0000
Constraint 2	0.0000	3636.3636
Constraint 3	0.0000	-2727.2727
Constraint 4	0.0000	509.0909

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
X1	400.0000	[0.0000 , Infinity]
X2	500.0000	[300.0000 , 614.2857]
X3	600.0000	[-Infinity , 636.3636]
X4	700.0000	[650.0000 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
1.	3.5000	[-Infinity , 3.7727]
2.	3.0000	[2.3000 , 4.5000]
3.	4.5000	[4.0714 , 8.0000]
4.	100.0000	[81.2500 , 150.0000]

Definiëren we voor $i = 1, \dots, 4$ de beslissingsvariabele x_i als het aantal ton van legering i dat gebruikt wordt om aan de order te voldoen tegen een maximale netto winst dan wordt op de voorgaande bladzijde het LP-model met de bijbehorende computeroutput gegeven (merk op dat de coëfficiënten in de criteriumfunctie gelijk zijn aan de verkoopprijs van 1000 euro per ton staal minus de kostprijs per ton van de betreffende legering).

	legering 1	legering 2	legering 3	legering 4
nikkel	6%	3%	2%	1%
carbon	3%	2%	5%	6%
mangaan	8%	3%	1%	1%

Beantwoord vervolgens de volgende vragen:

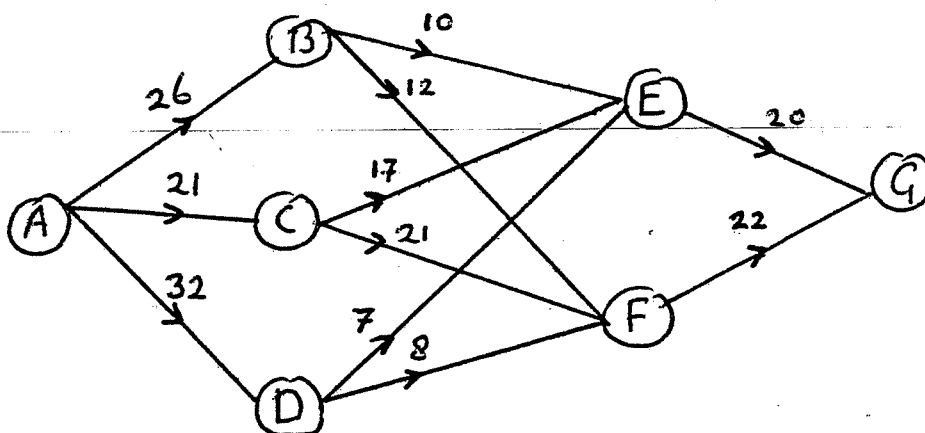
- Wat is de fysische betekenis van de schaduwprijs bij voorwaarde 4?
- Wat is het effect op de optimale oplossing als de kostprijs van € 600 per ton van legering 1 zou toenemen tot een kostprijs van € 750?
- Wat is het effect op de netto winst als de eis van ten hoogste 3 ton carbon wordt aangescherpt tot de eis van ten hoogste 2.95 ton carbon en wat is het effect bij aanscherping tot hooguit 2.2 ton carbon?
- Wat gebeurt er met de netto winst als de eis van precies 4.5 ton mangaan zou worden vervangen door de eis van precies 4.55 ton mangaan?
- Stel dat ook legering 5 beschikbaar is. Voor deze legering zijn de percentages nikkel, carbon en mangaan gelijk aan 3%, 2% en 10%. Voor welke kostprijs van legering 5 wordt het interessant deze legering te gebruiken?

Opgave 3.

Een vliegtuig moet een vlucht uitvoeren van beginpunt A naar eindpunt G . Een tweetal tussenlandingen dient gemaakt te worden. De eerste tussenlanding is in één van de steden B , C of D , terwijl de tweede tussenlanding plaatsvindt in één van de steden E of F . De onderstaande figuur geeft de vliegafstanden tussen de verschillende steden.

- Bepaal met dynamische programmering (dus hier *niet* met Dijkstra) de vliegroute van A naar G waarvoor de totale vliegafstand minimaal is. Definieer zorgvuldig de waardefunctie en geef in algemene termen de recursierelatie voor u aan het rekenen slaat.

(b) Bepaal met dynamische programmering de vliegroute van A naar G waarvoor de grootste afstand die in één keer vliegen wordt afgelegd zo klein mogelijk is. Definieer zorgvuldig de waardefunctie en geef in algemene termen de recursierelatie voor u aan het rekenen slaat.



Opgave 4

(a) Beschouw een netwerk met n knooppunten $N_1, \dots, N_n$, waarbij c_{ij} kosten zijn om een directe verbinding tussen knooppunt N_i en knooppunt N_j aan te leggen. Formuleer in algemene termen op preciese wijze de labellingprocedure van het algoritme van Prim om de minimale opspannende boom te berekenen.

(b) Pas het algoritme van Prim toe om op alternatieve wijze vraag (b) uit opgave 3 op te lossen. Geef duidelijk aan hoe uit de gevonden minimale boom de gezochte vliegroute volgt.

(c) Je hebt de beschikking over een onbeperkt aantal exemplaren van vijf verschillende muntstukken met respectievelijke waarden van $d_1, d_2, \dots, d_5$ cent met $d_1 = 1$. Je wilt iemand anders een bedrag ter waarde van M cent geven met zo weinig mogelijk muntstukken. Formuleer dit probleem als een kortste-pad probleem in een acyclisch netwerk. Geef duidelijk de betekenis van de knooppunten en de pijlen en geef in algemene termen het algoritme om het probleem op te lossen.

Opgave 5.

De handelaar Koos Zwart maakt regelmatig trips tussen Amsterdam en Johannesburg om in Zuid-Afrika diamantvijsel in te kopen. Voor dit vijsel heeft Koos een constante afzet in Amsterdam onder meer bij een fabrikant

Antikraak van fietsslots. De constante afzet in Amsterdam is 50 gram diamantvijsel per week en Koos zorgt voor een stipte levering. De trip naar Johannesburg neemt precies één week in beslag. De vaste kosten per trip zijn f 1800 en de inkoopkosten per gram diamantvijsel is f 100. In Amsterdam wordt het diamantvijsel tegen f 500 per gram afgezet. Voor elke gram vijsel in voorraad worden per week voorraadkosten gemaakt die gelijk zijn aan 0.5% van de inkoopkosten.

(a) Bij welk voorraadniveau moet Koos naar Johannesburg vliegen en hoeveel moet hij daar dan inkopen opdat zijn gemiddelde kosten minimaal zijn?

(b) Beantwoord bovenstaande vraag ook voor het geval dat Koos een korting van 19% krijgt op de inkoopkosten als hij meer dan 650 gram tegelijk inkoopt.

(c) Veronderstel nu dat Koos wil stoppen met de handel. Koos heeft echter zijn trouwste klant -de fabrikant Antikraak van fietsslots- toegezegd aan het begin van elk van de komende vijf weken de respectievelijke hoeveelheden $D_1 = 220$, $D_2 = 280$, $D_3 = 360$, $D_4 = 140$ en $D_5 = 270$ gram diamantvijsel te leveren. Voor deze leveringen hoeft hij niet naar Johannesburg, maar kan hij aan het begin van elke week terecht op een adresje in Amsterdam. Dit adres rekent Koos f 250 aan vaste kosten bij elke inkoop en f 200 per ingekochte gram. De rentekosten van in voorraad geïnvesteerd kapitaal zijn opnieuw 0.5% per week. Bereken met de Silver-Meal heuristiek hoe Koos voor de komende vijf weken te werk moet gaan als zijn huidige voorraad nul is.

Puntentoekening: elke opgave 18 punten

opgave 1(a), 1(b) elk onderdeel 9 punten,
opgave 2(a), 2(b), 2(c) elk 4 punten, 2(d), 2(e) elk 3 punten,
opgave 3(a), 3(b) elk 9 punten,
opgave 4(a), 4(b), 4(c),
opgave 5(a), 5(b), 5(c) elk 6 punten.

Eindcijfer: $\max(1, \frac{\text{totale aantal punten}}{10})$.