

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE BWI
7 februari 2006, 18.30 - 21.30 uur, Q112

Opgave 1.

Een staalbedrijf heeft een opdracht ontvangen voor het leveren van 100 ton van een speciaal staalsoort. Aan het staal zijn bepaalde eisen opgelegd: het staal moet tenminste 3.5 ton nikkel, ten hoogste 3 ton carbon en precies 4.5 ton mangaan bevatten. Het bedrijf ontvangt € 1000 per ton van deze staalsoort. Om het staal te maken zijn vier legeringen in elke gewenste hoeveelheid ter beschikking. Voor elk van deze vier legeringen geven we in onderstaande tabel de percentages nikkel, carbon en mangaan. De kostprijs van de vier legeringen $i = 1, 2, 3$ en 4 zijn respectievelijk € 600, 500, 400 en 300 per ton. Definieren we voor $i = 1, \dots, 4$ de beslissingsvariabele x_i als het aantal ton van legering i dat gebruikt wordt om aan de order te voldoen tegen een maximale netto winst dan wordt hieronder het LP-model met de bijbehorende computeroutput gegeven.

	legering 1	legering 2	legering 3	legering 4
nikkel	6%	3%	2%	1%
carbon	3%	2%	5%	6%
mangaan	8%	3%	1%	1%

LP-model en computeroutput staan op pagina 3. Bedenk hierbij dat nettowinstcoëfficiënt $c_1 = 1000 - 600 = 400$, etc.

Beantwoord vervolgens de volgende vragen:

- (a). Wat is de fysische betekenis van de schaduwprijs bij voorwaarde 4?
- (b). Wat is het effect op de optimale oplossing als de kostprijs van € 600 per ton van legering 1 zou toenemen tot een kostprijs van € 750
- (c). Wat is het effect op de netto winst als de eis van ten hoogste 3 ton carbon wordt aangescherpt tot de eis van ten hoogste 2.95 ton carbon en wat is het effect bij aanscherping tot hooguit 2.2 ton carbon?
- (d). Wat gebeurt er met de netto winst als de eis van precies 4.5 ton mangaan zou worden vervangen door de eis van precies 4.55 ton mangaan?
- (e). Stel dat ook legering 5 beschikbaar is. Voor deze legering zijn de percentages nikkel, carbon en mangaan gelijk aan 3%, 2% en 10%. Voor welke kostprijs van legering 5 wordt het interessant deze legering te gebruiken?

Opgave 2.

De baggermaatschappij Wijsmuller staat voor de taak een netwerk van oliepijpleidingen aan te leggen in een olieland aan de Perzische Golf. Vijf belangrijke vindplaatsen V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 moeten onderling en met de havenstad H bereikbaar zijn via een nog aan te leggen stelsel van pijpleidingen. De kosten van het aanleggen van directe pijplijnverbindingen tussen de vindplaatsen onderling en tussen de vindplaatsen en de haven worden in onderstaande tabel gegeven, waarin een streepje betekent dat de desbetreffende directe verbinding niet in aanmerking komt voor de aanleg van een pijplijn. Men is uiteraard geïnteresseerd in het netwerk met minimale totale kosten.

	H	V1	V2	V3	V4	V5
H	–	200	750	–	500	–
V1	200	–	900	350	–	1100
V2	750	900	–	–	–	1200
V3	–	350	–	–	450	1500
V4	500	–	–	450	–	1150
V5	–	1100	1200	1500	1150	–

Tabel 1. Kosten van directe pijplijnverbindingen

- (a). Met welk algoritme kun je het goedkoopste pijplijnnetwerk vinden? Formuleer in detail en in ALGEMENE termen de stappen van dit algoritme (dus, in algemene termen, ga uit van n knooppunten $N_1, \dots, N_n$ en kosten c_{ij} voor het aanbrengen van een directe verbinding tussen knooppunt N_i en knooppunt N_j).
- (b). Bereken met dit algoritme het minimale kostennetwerk.
- (c). Je hebt het minimale kostennetwerk berekend en vervolgens krijg je te horen dat de directe kosten in de tabel niet juist zijn, maar de kwadraten van de genoemde kosten hadden moeten zijn (dus 200 had 40,000 moeten zijn, etc). Zonder berekeningen uit te voeren, kun je zeggen of het eerder gevonden netwerk optimaal blijft of niet? Beargumenteer je antwoord.

Opgave 3.

- (a). Beschouw een acyclisch netwerk met knooppunten $M, M-1, \dots, 0$ en kosten c_{ij} als de voorwaartse pijl van i naar j met $j < i$ doorlopen wordt. Formuleer het dynamisch programmeringsalgoritme om het minimale-kosten pad van knooppunt M naar knooppunt 0 te berekenen. Geef duidelijk de betekenis van de waardefunctie aan en beschrijf ook hoe na afloop van de berekeningen het minimale-kosten pad wordt afgelezen.
- (b). Je hebt de beschikking over een onbeperkt aantal exemplaren van vijf verschillende muntstukken met respectievelijke waarden van $d_1, d_2, \dots, d_5$ cent met $d_1 = 1$. Je wilt iemand anders een bedrag ter waarde van M cent geven met zo weinig mogelijk muntstukken. Formuleer dit probleem als een kortste-pad probleem in een acyclisch netwerk. Geef duidelijk de betekenis van de knooppunten en de pijlen en geef in algemene termen het algoritme om het probleem op te lossen.

Objective Function :

MAX 400.0000 X1 +500.0000 X2 +600.0000 X3 +700.0000 X4

Subject to :

1. 0.0600 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 >= 3.5000
2. 0.0300 X1 +0.0200 X2 +0.0500 X3 +0.0600 X4 <= 3.0000
3. 0.0800 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 = 4.5000
4. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 100.0000

Summary of Results

Value Objective Function : 49545.4545

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	36.3636	0.0000
X2 :	47.7273	0.0000
X3 :	0.0000	36.3636
X4 :	15.9091	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
	-----	-----
Constraint 1	0.2727	-0.0000
Constraint 2	0.0000	3636.3636
Constraint 3	0.0000	-2727.2727
Constraint 4	0.0000	509.0909

Objective Coefficient Ranges

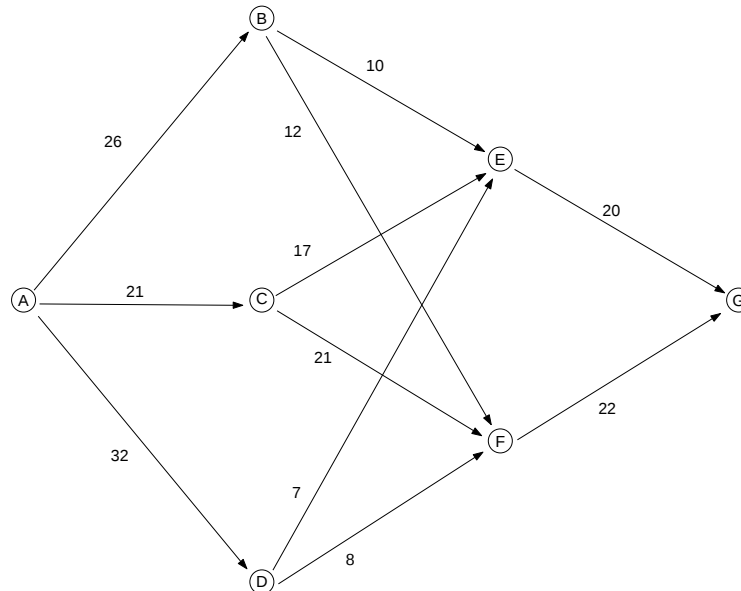
Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	400.0000	[0.0000 , Infinity]
X2	500.0000	[300.0000 , 614.2857]
X3	600.0000	[-Infinity , 636.3636]
X4	700.0000	[650.0000 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	---	-----
1.	3.5000	[-Infinity , 3.7727]
2.	3.0000	[2.3000 , 4.5000]
3.	4.5000	[4.0714 , 8.0000]
4.	100.0000	[81.2500 , 150.0000]

Opgave 4.

Een vliegtuig moet een vlucht uitvoeren van beginpunt A naar eindpunt G . Een tweetal tussenlandingen dient gemaakt te worden. De eerste tussenlanding is in één van de steden B , C of D , terwijl de tweede tussenlanding plaatsvindt in één van de steden E of F . De onderstaande figuur geeft de vliegafstanden tussen de verschillende steden.



- Bepaal met dynamische programmering (dus hier *niet* met Dijkstra) de vliegroute van A naar G waarvoor de totale vliegafstand minimaal is. Definieer zorgvuldig de waardefunctie en geef in meer algemene termen de recursierelatie voor u aan het rekenen slaat.
- Bepaal met dynamische programmering de vliegroute van A naar G waarvoor de grootste afstand die in één keer vliegen wordt afgelegd zo klein mogelijk is. Definieer zorgvuldig de waardefunctie en geef in meer algemene termen de recursierelatie voor u aan het rekenen slaat.

Opgave 5.

De handelaar Koos Zwart maakt regelmatig trips tussen Amsterdam en Johannesburg om in Zuid-Afrika diamantvijsel in te kopen. Voor dit vijsel heeft Koos een constante afzet in Amsterdam onder meer bij een fabrikant Antikraak van fietssloten. De constante afzet in Amsterdam is 50 gram diamantvijsel per week en Koos zorgt voor een stipte levering. De trip naar Johannesburg neemt precies één week in beslag. De vaste kosten per trip zijn € 1800 en de inkoopkosten per gram diamantvijsel is € 100. In Amsterdam wordt het diamantvijsel tegen € 500 per gram afgezet. Voor elke gram vijsel in voorraad worden per week voorraadkosten gemaakt die gelijk zijn aan 0.5% van de inkoopkosten.

- Bij welk voorraadniveau moet Koos naar Johannesburg vliegen en hoeveel moet hij daar dan inkopen opdat zijn gemiddelde kosten minimaal zijn?
- Beantwoord bovenstaande vraag ook voor het geval dat Koos een korting van 19% krijgt op de inkoopkosten als hij meer dan 650 gram tegelijk inkoopt.

- (c). Veronderstel nu dat Koos wil stoppen met de handel. Koos heeft echter zijn trouwste klant—de fabrikant Antikraak van fietssloten—toegezegd aan het begin van elk van de komende vijf weken de respectievelijke hoeveelheden $D_1 = 220$, $D_2 = 280$, $D_3 = 360$, $D_4 = 140$ en $D_5 = 270$ gram diamantvijsel te leveren. Voor deze leveringen hoeft hij niet naar Johannesburg, maar kan hij aan het begin van elke week terecht op een adresje in Amsterdam. Dit adres rekent Koos € 250 aan vaste kosten bij elke inkoop en € 200 per ingekochte gram. De rentekosten van in voorraad geïnvesteerd kapitaal zijn opnieuw 0.5% per week. Bereken met de Silver-Meal heuristiek hoe Koos voor de komende vijf weken te werk moet gaan als zijn huidige voorraad nul is.

Puntentoekening

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	18	4	4	4	3	3
2	18	7	7	4		
3	18	9	9			
4	18	9	9			
5	18	6	6	6		

Eindcijfer: $1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}.$