

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE, 27 oktober 2005, 13.30-15.30 uur (geen gebruik van de rekenmachine)

Opgave 1

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{array}{ll}\max & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{onder} & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 22 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de standaardvorm voor toepassing van de simplexmethode. Wat is de basisoplossing waarmee het algoritme gestart wordt?
- (b). Pas **één** iteratie van de simplex-methode toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Geef duidelijk in woorden aan hoe u tewerk gaat om de oorspronkelijke basisoplossing te veranderen in een verbeterde basisoplossing. Geef de basisvorm van het LP-probleem behorende bij de nieuwe basisoplossing.
- (c). Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde? Hoe kun je van de basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dat hier het geval?
- (d). Formuleer van het oorspronkelijke LP-probleem in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem. Wat kunt u zeggen over de optimale criteriumwaarde van het duale probleem zonder dit probleem op te lossen?

Opgave 2

Jij speelt met iemand het volgende spel. Jij en je tegenstander kiezen elk een getal uit de verzameling $\{1, 4, 7, 10\}$ en schrijven dit niet zichtbaar voor elkaar op een papiertje. Als jullie beiden hetzelfde getal gekozen hebben, dan wordt onderling niets verrekend. Als jullie verschillende getallen gekozen hebben en de som van de getallen is even, dan krijg jij van je tegenstander een bedrag dat gelijk is aan het getal dat je tegenstander gekozen had (bijvoorbeeld, kies jij 1 en je tegenstander 7, dan krijg jij 7 euro van je tegenstander). Is bij verschillend gekozen getallen de som van de twee getallen oneven, dan betaal jij aan je tegenstander een bedrag dat gelijk is aan het door jou gekozen getal (bijvoorbeeld kies jij 4 en je tegenstander 1, dan krijgt je tegenstander 4 euro van jou). Stel dat jij en je tegenstander dit spel herhaaldelijk spelen. Wat

voor soort strategie moet je dan volgen als je wilt bereiken dat je minimaal verwachte opbrengst bij een uitvoering van het spel zo groot mogelijk is? Geef duidelijk aan hoe zo'n strategie in elkaar zit en formuleer een LP-probleem waarmee jij de voor jou optimale strategie kan berekenen.

Opgave 3

De Tielse Vruchtensap Centrale (TVC) produceert de sinaasappeldrank Sinapje in pakken van één liter. De Warenwet eist dat één liter Sinapje minstens 1 gram kalium, minstens 60 mg vitamine C en minstens 0.25 mg foliumzuur (vitamine B11) bevat. Sinapje wordt gemaakt uit het sap van geperste sinaasappelen, die TVC koopt bij vier fruittelers in de Betuwe. De sinaasappelen van deze vier telers bevatten de genoemde mineralen en vitamines in verschillende hoeveelheden, die worden gegeven in de volgende tabel.

	kalium in gr.	vitamine C in mg.	foliumzuur in mg.
teler 1	0.90	90	0.50
teler 2	1.50	50	0.15
teler 3	0.75	40	0.40
teler 4	1.75	74	0.10

Tabel 1. Gehaltes per kg. geperste sinaasappelen.

Dus het sap van één kg. sinaasappelen van teler 1 bevat 0.9 gram kalium, 90 mg vitamine C en 0.5 mg foliumzuur. Enz. In elk pak Sinapje gaat het sap van precies één kilo geperste sinaasappelen, waarbij het is toegestaan dat sinaasappelen van verschillende telers gebruikt worden. De inkooprijzen per kg. sinaasappelen zijn bij de afzonderlijke fruittelers: 20, 10, 15 en 12.5 eurocent.

Om tegen zo laag mogelijke kosten een pak Sinapje te produceren dat aan de eisen voldoet, lost TVC het volgende LP-probleem op:

$$\begin{array}{ll}
 \min & 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 12.5x_4 \\
 \text{onder} & 1. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 & 2. \quad 0.9x_1 + 1.5x_2 + 0.75x_3 + 1.75x_4 \geq 1 \\
 & 3. \quad 90x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 74x_4 \geq 60 \\
 & 4. \quad 0.5x_1 + 0.15x_2 + 0.4x_3 + 0.1x_4 \geq 0.25 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

De beslissingsvariabele x_j geeft voor een pakje het proportionele deel aan dat afkomstig is van sinaasappelen van teler j . De computeruitvoer van ORSTAT2000 staat hieronder.

MIN 20.0000 X1 +10.0000 X2 +15.0000 X3 +12.5000 X4

Subject to :

1. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 1.0000
2. 0.9000 X1 +1.5000 X2 +0.7500 X3 +1.7500 X4 >= 1.0000
3. 90.0000 X1 +50.0000 X2 +40.0000 X3 +74.0000 X4 >= 60.0000
4. 0.5000 X1 +0.1500 X2 +0.4000 X3 +0.1000 X4 >= 0.2500

Value Objective Function : 12.7778

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	0.2593	0.0000
X2 :	0.7037	0.0000
X3 :	0.0370	0.0000
X4 :	0.0000	2.2778

	Slack of Surplus	Shadow prices
	-----	-----
Constraint 1	0.0000	3.8889
Constraint 2	0.3167	0.0000
Constraint 3	0.0000	0.0556
Constraint 4	0.0000	22.2222

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	20.0000	[17.0000 , 25.5909]
X2	10.0000	[2.5000 , 11.6712]
X3	15.0000	[12.0433 , 17.1429]
X4	12.5000	[10.2222 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	---	-----
1.	1.0000	[0.9565 , 1.2500]
2.	1.0000	[-Infinity , 1.3167]
3.	60.0000	[46.0000 , 61.4286]
4.	0.2500	[0.2375 , 0.3687]

Geef een **beargumenteerd** antwoord op de volgende vragen.

- (a). Stel dat de inkoopprijs van teler 1 niet 20 maar 18 eurocent per kg blijkt te zijn. Zou de optimale oplossing veranderen?
- (b). Stel dat de samenstelling van een pak Sinapje zo zou moeten zijn dat het tenminste 55 mg vitamine C bevat (in plaats van 60 mg). Nemen de kosten dan toe of af? Met hoeveel? Wat kun je zeggen over de toe- of afname van de kosten als de eis zou zijn dat er tenminste 40 mg. vitamine inzit?
- (c). Wat gebeurt er met de optimale oplossing als alle fruitteilers hun prijzen met 5% per kg. verhogen?
- (d). TVC overweegt een vijfde fruitteiler bij de inkoop te betrekken. Deze teler vraagt 25 eurocent per kg. sinaasappelen. Een kg. sinaasappelen van teler 5 bevat 1 gram kalium, 60 mg vitamine C en 0.2 mg foliumzuur. Zou in een nieuwe optimale oplossing TVC bij deze fruitteiler sinaasappelen inkopen?

Opgave 4

Vier vrachtwagens zijn beschikbaar om goederen te leveren aan zeven klanten. Vrachtwagen i kan maximaal b_i ton goederen op een rit vervoeren, waarbij b_1, b_2, b_3 en b_4 gegeven zijn. Aan klant j moet a_j ton aan goederen geleverd worden, waarbij $a_1, a_2, \dots, a_7$ gegeven zijn. Als vrachtwagen i wordt ingezet, dan brengt dit gegeven kosten c_i met zich mee ($i=1, 2, 3, 4$). De vraag is welke vrachtwagen ingezet moeten worden en hoe elke klant beleverd wordt zodat de totale kosten minimaal zijn. De eis is dat elke klant door precies één vrachtwagen zijn goederen geleverd krijgt. Elk vrachtwagen die ingezet wordt kan slechts één beleveringsronde uitvoeren, waarbij het wel zo is dat eenzelfde vrachtwagen meerdere klanten kan beleveren.

- (a). Formuleer een geheeltallig LP-probleem om een beleveringsschema te bepalen waarvoor de totale kosten minimaal zijn. Geef duidelijk de betekenis van uw beslissingsvariabelen aan.
- (b). Stel dat de volgende extra eisen worden opgelegd
 - eenzelfde vrachtwagen kan niet zowel klant 2 als klant 7 beleveren
 - de klanten 4, 5 en 6 kunnen niet alledrie tegelijk door eenzelfde vrachtwagen beleverd worden

- als vrachtwagen 3 de klant 1 zou beleveren, dan kan deze vrachtwagen hooguit nog één van de klanten 3, 5 en 7 beleveren Hoe moet het geheeltallige LP-probleem uit vraag (a) aangepast worden?

Puntentoekenning: elke opgave 18 punten

opgave 1(a), 1(b), 1(c), 1(d): 3, 7, 3, 5 punten,

opgave 2: 18 punten,

opgave 3(a), 3(b), 3(c), 3(d): 4, 4, 5, 5 punten,

opgave 4(a), 4(b): 12, 6 punten.

Cijfer: $1 + \frac{1}{8}(\text{totale aantal punten})$, plus eventueel bonus.