

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE BWI

17 FEBRUARI 2005 18.30 - 21.30

Opgave 1.

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{array}{ll}\max & 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{onder} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de basisvorm door verschilvariabelen toe te voegen. Geef een startoplossing voor het LP-probleem in basisvorm en pas één iteratie van de simplex-methode toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Zouden in een optimale basisoplossing alle drie variabelen een positieve waarde kunnen hebben?
- (b). Geef van het bovenstaande LP-probleem in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem. Wat kun je zeggen van de optimale criteriumwaarde van het duale LP-probleem als je zou weten dat het bovenstaande LP-probleem de maximale criteriumwaarde 12 heeft?

Opgave 2.

Een staalbedrijf heeft een opdracht ontvangen voor het leveren van 100 ton van een speciaal staalsoort. Aan het staal zijn bepaalde eisen opgelegd: het staal moet tenminste 3.5 ton nikkel, ten hoogste 3 ton carbon en precies 4.5 ton mangaan bevatten. Het bedrijf ontvangt € 1000 per ton van deze staalsoort. Om het staal te maken zijn vier legeringen in elke gewenste hoeveelheid ter beschikking. Voor elk van deze vier legeringen geven we in onderstaande tabel de percentages nikkel, carbon en mangaan. De kostprijs van de vier legeringen $i = 1, 2, 3$ en 4 zijn respectievelijk € 600, 500, 400 en 300 per ton. Definieren we voor $i = 1, \dots, 4$ de beslissingsvariabele x_i als het aantal ton van legering i dat gebruikt wordt om aan de order te voldoen tegen een maximale netto winst dan wordt hieronder het LP-model met de bijbehorende computeroutput gegeven.

	legering 1	legering 2	legering 3	legering 4
nikkel	6%	3%	2%	1%
carbon	3%	2%	5%	6%
mangaan	8%	3%	1%	1%

LP-model en computeroutput staan op de volgende pagina.

Objective Function :

MAX 400.0000 X1 +500.0000 X2 +600.0000 X3 +700.0000 X4

Subject to :

1. 0.0600 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 >= 3.5000
2. 0.0300 X1 +0.0200 X2 +0.0500 X3 +0.0600 X4 <= 3.0000
3. 0.0800 X1 +0.0300 X2 +0.0200 X3 +0.0100 X4 = 4.5000
4. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 100.0000

Summary of Results

Value Objective Function : 49545.4545

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	36.3636	0.0000
X2 :	47.7273	0.0000
X3 :	0.0000	36.3636
X4 :	15.9091	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
-----	-----	-----
Constraint 1	0.2727	-0.0000
Constraint 2	0.0000	3636.3636
Constraint 3	0.0000	-2727.2727
Constraint 4	0.0000	509.0909

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	400.0000	[0.0000 , Infinity]
X2	500.0000	[300.0000 , 614.2857]
X3	600.0000	[-Infinity , 636.3636]
X4	700.0000	[650.0000 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	-----	-----
1.	3.5000	[-Infinity , 3.7727]
2.	3.0000	[2.3000 , 4.5000]
3.	4.5000	[4.0714 , 8.0000]
4.	100.0000	[81.2500 , 150.0000]

Beantwoord vervolgens de volgende vragen:

- Wat is de fysische betekenis van de schaduwprijs bij voorwaarde 4?
- Wat is het effect op de optimale oplossing als de kostprijs van € 600 per ton van legering 1 zou toenemen tot een kostprijs van € 750
- Wat is het effect op de netto winst als de eis van ten hoogste 3 ton carbon wordt aangescherpt tot de eis van ten hoogste 2.95 ton carbon en wat is het effect bij aanscherping tot hooguit 2.2 ton carbon?
- Wat gebeurt er met de netto winst als de eis van precies 4.5 ton mangaan zou worden vervangen door de eis van precies 4.55 ton mangaan?
- Stel dat ook legering 5 beschikbaar is. Voor deze legering zijn de percentages nikkel, carbon en mangaan gelijk aan 3%, 2% en 10%. Voor welke kostprijs van legering 5 wordt het interessant deze legering te gebruiken?

Opgave 3.

Een vliegtuig moet een vlucht uitvoeren van beginstad A naar eindstad G , waarbij een tweetal tussenlandingen gemaakt moeten worden met de eerste tussenlanding in één van de steden B , C of D en de tweede tussenlanding in één van de steden E of F . In onderstaande tabel worden de directe vliegafstanden gegeven.

van\naar	B	C	D	E	F	G
A	26	21	32	-	-	-
B	-	-	-	10	12	-
C	-	-	-	17	21	-
D	-	-	-	7	8	-
E	-	-	-	-	-	20
F	-	-	-	-	-	22

- Bepaal met dynamische programmering de vliegroute van A naar G waarvoor de totale afstand minimaal is.
- Bepaal met dynamische programmering de vliegroute van A naar G waarbij de grootste afstand die in één keer vliegen wordt afgelegd zo klein mogelijk is.

Opgave 4.

Koos Vink is een truffelhandelaar die regelmatig trips Amsterdam-Bangkok maakt om truffels in te kopen. De trip neemt 1 week in beslag en heeft vaste kosten € 2450. De inkoopkosten van truffels zijn € 100 per ons. In Amsterdam heeft Koos Vink een constante en gegarandeerde afzet van 50 ons per week, waarbij Koos zich verplicht heeft om altijd stipt aan de vraag te voldoen. De winst die Koos maakt is € 500 per ons. De voorraadkosten die Koos maakt zijn 0.5% per week over de inkoopkosten van de truffels die hij tijdelijk in voorraad heeft.

- Bepaal wanneer Koos zijn voorraad moet aanvullen en met hoeveel.
- Wat wordt de optimale aanvulgrootte als Koos 20% korting op de inkoopprijs krijgt bij een afname van tenminste 750 ons truffels?

- (c). Koos Vink heeft besloten te stoppen met de handel. Hij heeft echter een trouwe klant—Joop Broekhekke—toegezegd aan het begin van elk van de komende vijf weken de respectievelijke hoeveelheden $D_1 = 120$, $D_2 = 180$, $D_3 = 360$, $D_4 = 130$ en $D_5 = 270$ gram truffels te leveren. Voor de inkoop van deze leveringen hoeft hij niet naar Bangkok te vliegen, maar kan hij terecht op een adres in de Achterhoek. Dit adres rekent hem € 100 aan vaste kosten per bestelling en inkoopkosten € 20 per ingekochte gram. De voorraadkosten die Koos maakt zijn opnieuw 0.5% per week over de inkoopkosten van de truffels die hij tijdelijk in voorraad heeft. Bereken hoe Koos voor de komende vijf weken moet inkopen als zijn huidige voorraad aan truffels nul is.

Opgave 5.

Een fabriek moet voor de komende weken $t = 1, 2, \dots, T$ voorgeschreven geheeltallige hoeveelheden $D_1, D_2, \dots, D_T$ van een bepaald product leveren. Er moet stipt geleverd worden, d.w.z. nalevering is niet toegestaan. De beginvoorraad bij de fabriek van dit product is nul. Aan het begin van elke week kan het product in elke gewenste hoeveelheid geproduceerd worden en het product kan gedurende elke gewenste tijd in voorraad gehouden worden. De productietijd is verwaarloosbaar zodat de productie eventueel diezelfde week gebruikt kan worden om aan de vraag te voldoen. Wel is het zo dat elke keer vaste opstartkosten $K > 0$ worden gemaakt als een productie wordt gestart terwijl de week daarvoor geen productie heeft plaatsgevonden. Voor elke eenheid product die aan het eind van de week in voorraad is, worden voor die week voorraadkosten $h > 0$ gemaakt.

- (a). Formuleer het ontwerpen van een productieschema waarvoor de totale kosten minimaal zijn als een geheeltallig LP-probleem. (Aanwijzing: neem in ieder geval als variabelen x_i = productiehoeveelheid in week i , en v_i = de voorraad aan het begin van week i (= eind week $i - 1$).)
- (b). Hoe moet de geheeltallige LP-formulering aangepast worden als de volgende eisen worden opgelegd:
- als zowel in periode 3 als in periode 4 geproduceerd wordt, dan kan niet in periode 5 worden geproduceerd;
 - als zowel in periode 3 als in periode 4 geproduceerd wordt, dan worden extra kosten K_0 gemaakt.
- (c). Beschouw opnieuw de situatie uit vraag (a). Laat zien hoe het ontwerpen van een optimaal productieschema ook kan worden gemodelleerd als de bepaling van het kortste pad in een acyclisch netwerk. Geef de preciese betekenis van de knooppunten en van de pijlen, en specificeer de kosten bij de pijlen. Wat is de algemene vorm van het bijbehorende DP-algoritme?

Puntentoekening: elke opgave 18 punten

opgave 1(a), 1(b) 9 punten,
 opgave 2(a), 2(b), 2(c) 4 punten, 2(d), 2(e) 3 punten,
 opgave 3(a), 3(b) 9 punten,
 opgave 4(a), 4(b), 4(c), 5(a), 5(b), 5(c) 6 punten,

Eindcijfer: $1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}$.