Uitwerking Inleiding Besliskunde 23-10-03
(Deze uitwerking is gemaakt door een student, gebuik op eigen risico)

1 Min $\sum_{j=1}^{5} d_j^+ + d_j^-$

onder $d_j^+ - d_j^- = q_j - (a^+ - a^-) \cdot p_j - (b^+ - b^-) \cdot \ln(p_j)$
voor $j = 1, \dots, 5$

en $a^+, a^-, b^+, b^-, d_j^+, d_j^- \geq 0$ voor $j = 1, \dots, 5$

Hierbij is $d_j^+ + d_j^-$ gelijk aan $|d_j^+ - d_j^-|$. De hulpvariabelen $d_j^+$ en $d_j^-$ geven aan of de punten boven, dan wel onder de curve liggen.

2 a. max $3x_1 + 6x_2 + 4x_3$
onder $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 10$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 8$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

b. voer in: $z = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3$
oplossing: $x_4 = 10 \quad x_5 = 8 \quad x_1, x_2, x_3 = 0 \Rightarrow z = 0$

In de criterium functie heeft $x_2$ de grootste coëfficiënt, dus die moet zo groot mogelijk worden gemaakt. Dit kan tot $\min\left(\frac{10}{4}; \frac{8}{2}\right) = 2{,}5$.
Om uiteindelijk het model weer in basisvorm te krijgen, moet de coëfficiënt van $x_2$ in de ene restrictie gelijk worden aan 1 en in de andere restrictie gelijk aan 0.

dus: $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 10$ wordt:
$0{,}25x_1 + x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}25x_4 = 2{,}5$

van de tweede restrictie $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 8$ haal je $0{,}25x_1 + x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}25x_4 = 2{,}5$ twee keer eraf. Je houdt over:
$1{,}5x_1 + 2{,}5x_3 - 0{,}5x_4 + x_5 = 3$

tenslotte zorgt substitutie van $x_2 = 2,5 - 0,25\,x_1 - 0,25\,x_3 - 0,25\,x_4$ in de z vergelijking ervoor dat er een nieuwe basisvorm ontstaat:

max $z = 15 + 1,5\,x_1 + 2,5\,x_3 - 1,5\,x_4$

onder $0,25\,x_1 + x_2 + 0,25\,x_3 + 0,25\,x_4 = 2,5$

$1,5\,x_1 + 2,5\,x_3 - 0,5\,x_4 + x_5 = 3$

en $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

c. – basisvariabelen zijn: $x_2$ en $x_5$

– waarden: $x_2 = 2,5$ $x_5 = 3$

– criteriumwaarde $= 15$

– Als er in de criteriumfunctie nog een variabele is, met een positieve coëfficiënt, kan de oplossing nog verbeterd worden. Dus als er alleen negatieve coëfficiënten staan, is de gevonden oplossing optimaal.

– Dat is hier niet het geval, omdat er nog variabelen zijn met een positieve coëfficiënt. Bijvoorbeeld $x_3$ met 2,5.

– ~~Een optimale oplossing ligt altijd in een hoekpunt en het kan~~ ~~zijn dat in dat hoekpunt ...~~

Nee, het aantal positieve variabelen hangt af van het aantal restricties. In dit geval zijn er twee 'echte' restricties, dus zijn er ook twee variabelen positief in elke optimale oplossing.

d. Min $10\,y_1 + 8\,y_2$

onder $y_1 + 2\,y_2 \geq 3$

$4\,y_1 + 2\,y_2 \geq 6$

$y_1 + 3\,y_2 \geq 4$

en $y_1, y_2 \geq 0$

De onder (b) berekende oplossing van 15 kan nog verbeterd worden doordat er nog een positieve coëfficiënt is. Dus de minimale criteriumwaarde van het duale probleem is tenminste 15.

3 a. De eis was: 1000 nachtkijkers. Deze eis staat in constraint 4. Deze wordt nu 1050.
1050 ligt binnen de range van [900; 1066,6667] dus de extra kosten zijn dan: 50 * de schaduwprijs = 50 · 30 = 1500

b. de range van $x_2$ is [$-\infty$, 12] en er is een activiteit van 200 stuks. De nieuwe kosten van 12 liggen net binnen de range, dus de samenstelling van de optimale oplossing verandert niet. Maar de kosten stijgen wel met 200 · 2 = 400

c. Die eis staat in constraint 3. Het interval is [0; 500] met een schaduwprijs van 4.
- Als de eis vervalt, ~~zou~~ zouden de kosten dalen met 400 · 4 = 1600
- Als de eis zou worden 525 in plaats van 400; zouden de kosten stijgen met minimaal 125 · 4 = 500, omdat 525 buiten de range ligt

d. materiaal = constraint 2 de range is [3800, 4300]
arbeidsuren = constraint 1 de range is [3000, $\infty$]
Aangezien constraint 2 bindend is en constraint 1 niet, zou ~~dat~~ de oplossing kunnen verbeteren.
Dit is een simultane verandering, dus we gebruiken de 100% regel.
stijging constraint 2: 100/300 = $\frac{1}{3}$
daling constraint 1: 200/300 = $\frac{2}{3}$ } Samen zijn ze 1
en dat is ≤ 1, dus het is toegestaan.
De minimale kosten veranderen met: $-200 \cdot -0 + 100 \cdot -5 = -500$
De totale minimale kosten dalen dus met 500

e. locatie 2: kosten zijn 10, wordt 12
locatie 3: kosten zijn 9, wordt 10,8
Weer met de 100% regel: deze geeft aan dat de veranderingen zijn toegestaan, dus de samenstelling van de optimale oplossing verandert niet. Wel zijn stijgen de totale minimale kosten met:
2 · 200 + ~~[illegible]~~ 1,8 · 400 = 1120

f. De economische kostprijs op de $5^e$ locatie is:

$4 \cdot -0 + 5 \cdot -5 + 1 \cdot 30 = -25 + 30 = 5$.

Dus de echte kosten om op locatie 5 nachtkijkers te produceren liggen lager dan er voor betaald gaat worden.

Het is dus <u>niet</u> zinvol.

4 a. de kosten zijn: $\begin{cases} 0 & \text{als } i \text{ niet gemaakt wordt} \\ k_i + v_i \cdot x_i & \text{als } i \text{ wel wordt gemaakt} \end{cases}$

waarbij $x_i$ het aantal eenheden is dat van product $i$ gemaakt wordt.

Dit kan je modelleren als:

$\cancel{Tk_i \geq k_i d_i + V_i \cdot x_i d_i}$

$d_i \in \{0,1\}$

$x_i \in \mathbb{Z}_+$

$x_i \leq M d_i$

waarbij altijd geldt: $x_i \leq M$.

$Tk_i$ zijn de totale kosten om product $i$ te maken.

dus: $\text{Max} \sum_{i=1}^{10} w_i x_i \cancel{- Tk_i}$ $\quad \sum_i (w_i - v_i) x_i - \sum_i k_i \delta_i$

onder $\sum_{i=1}^{10} a_i x_i \leq B$

$\cancel{Tk_i \geq k_i d_i + v_i x_i d_i}$ voor $i = 1, \ldots, 10$

$x \leq M d_i$ voor $i = 1, \ldots, 10$

$d_i \in \{0,1\}$ voor $i = 1, \ldots, 10$

$x_i \in \mathbb{Z}_+$ voor $i = 1, \ldots, 10$

b. - $d_3 + d_5 + d_7 \leq 2$

- $d_1 + d_3 + d_5 + d_8 + d_{10} \leq 3 + M(1 - d_4)$ waarbij $M$ groot. In dat geval is true al genoeg.

c. $\cancel{x_7 \leq e\, d_7 + M(1 - d_7)}$

$\cancel{x_7 \geq e\, d_7}$

$\cancel{e \in \{5, 10\}}$

$x_7 = 0 \cdot \delta_1 + 5\,\delta_2 + 10\,\delta_3$

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$

Zie boven

4 c - de tweede extra eis:

$x_1 + x_2 \leq 100 + M(1-f)$
$x_5 + x_8 \leq 100 + Mf$
$f \in \{0,1\}$

Als $x_5 + x_8 > 100$ dan wordt $f$ 1.