

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE

23 oktober 2003, 13.30 – 15.30 uur

REKENMACHINE TOEGESTAAN

DIT TENTAMEN BESTAAT UIT 4 OPGAVEN



Opgave 1

Stel dat vijf punten $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_5, q_5)$ in het platte vlak gegeven zijn. Aan deze punten willen we een curve van de vorm $y = ax + b \ln(x)$ aanpassen zodat de som van de absolute afwijkingen

$$\sum_{j=1}^5 |q_j - (ap_j + b \ln(p_j))|$$

minimaal is. Formuleer een LP-probleem waarmee de waarden van a en b kunnen worden berekend.

Opgave 2

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ \text{onder} & x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de standaardvorm door verschilvariabelen x_4 en x_5 toe te voegen.
- (b). Kies de verschilvariabelen x_4 en x_5 als de startoplossing van de simplex-methode en pas **één** iteratie toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Beargumenteer de keuzes die je doet om de oorspronkelijke basisoplossing te veranderen in deze nieuwe basisoplossing. Geef de basisvorm van het LP-probleem behorende bij de nieuwe basisoplossing.
- (c). Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde? Hoe kun je van de nieuwe basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dit hier het geval? Zo nee, waarom niet? Kan het gebeuren dat in elke optimale oplossing van het LP-probleem elk van de drie variabelen x_1, x_2, x_3 positief is?
- (d). Formuleer van het oorspronkelijke LP-probleem (1) in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem. Wat kun je op grond van de onder (b) berekende nieuwe toegelaten basisoplossing zeggen over de minimale criteriumwaarde van het duale probleem. Is deze kleiner dan 15 of tenminste 15? Beargumenteer uw antwoord.

Opgave 3

Holland EvIEWS heeft een contract getekend om 1000 nachtkijkers te leveren voor een vredesmissie. Voor de productie van de nachtkijkers heeft het bedrijf vier locaties ter beschikking. Vanwege lokale omstandigheden zijn de kosten voor het produceren van een nachtkijker verschillend per locatie. De benodigde arbeidskracht en het benodigde materiaal voor het maken van een nachtkijker is ook verschillend per locatie. Deze gegevens betreffende de productie van een nachtkijker staan in de volgende tabel:

locatie	kosten	arbeidsuren	eenheden materiaal
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

Voor de vier productielocaties tezamen zijn in totaal 3300 arbeidsuren ter beschikking en 4000 eenheden materiaal. De opdrachtgever heeft in het contract geëist dat tenminste 400 nachtkijkers worden geproduceerd op locatie drie. De computeruitvoer voor dit probleem staat op de volgende pagina. Gebruik deze uitvoer om een beargumenteerd antwoord te geven op de volgende vragen:

- Wat zijn de extra kosten voor het maken van 50 nachtkijkers meer?
- Wat gebeurt er met de optimale oplossing als de productiekosten per nachtkijker op locatie 2 gelijk aan 12 euro zouden zijn in plaats van aan 10 euro?
- Met hoeveel zouden de kosten dalen als de opdrachtgever haar eis van tenminste 400 nachtkijkers te produceren op locatie 3 zou laten vallen? Wat gebeurt er met de kosten als de eis zou worden verscherpt tot de eis dat tenminste 525 nachtkijkers op locatie 3 worden geproduceerd?
- Stel dat het bedrijf over 100 extra eenheden materiaal zou kunnen beschikken tegen het inleveren van 200 arbeidsuren. Wat gebeurt er dan met de minimale totale kosten?
- Stel dat op de locaties twee en drie de productiekosten per nachtkijker 20% hoger zouden zijn. Verandert de optimale oplossing dan?
- Stel dat ook nog een vijfde locatie voor productie ter beschikking blijkt te zijn. Op deze locatie zijn voor elke nachtkijker de productiekosten gelijk aan 7 euro en zijn 4 arbeidsuren en 5 eenheden materiaal nodig voor de productie van een nachtkijker. Is het zinvol deze locatie te gebruiken in de optimale oplossing?

Objective Function :

MIN 15.0000 X1 +10.0000 X2 +9.0000 X3 +7.0000 X4

Subject to :

1. 2.0000 X1 +3.0000 X2 +4.0000 X3 +5.0000 X4 <= 3300.0000
2. 3.0000 X1 +4.0000 X2 +5.0000 X3 +6.0000 X4 <= 4000.0000
3. 1.0000 X3 >= 400.0000
4. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 1000.0000

Summary of Results

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	400.0000	0.0000
X2 :	200.0000	0.0000
X3 :	400.0000	0.0000
X4 :	0.0000	7.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
-----	-----	-----
Constraint 1	300.0000	-0.0000
Constraint 2	0.0000	-5.0000
Constraint 3	0.0000	4.0000
Constraint 4	0.0000	30.0000

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	15.0000	[11.5000 , Infinity]
X2	10.0000	[-Infinity , 12.0000]
X3	9.0000	[5.0000 , Infinity]
X4	7.0000	[0.0000 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	---	-----
1.	3300.0000	[3000.0000 , Infinity]
2.	4000.0000	[3800.0000 , 4300.0000]
3.	400.0000	[0.0000 , 500.0000]
4.	1000.0000	[900.0000 , 1066.6667]

Opgave 4

Tien verschillende producten kunnen worden gemaakt uit eenzelfde grondstof. Van deze grondstof zijn B eenheden beschikbaar. Om 1 eenheid van product i te maken zijn a_i eenheden van de grondstof nodig voor $i = 1, \dots, 10$. Als een positieve hoeveelheid van product i wordt gemaakt, dan zijn er vaste productiekosten K_i die niet afhangen van de productiehoeveelheid en kosten v_i voor elke geproduceerde eenheid van product i voor $i = 1, \dots, 10$. Voor product i is de opbrengst w_i per geproduceerde eenheid voor $i = 1, \dots, 10$ (de constanten B, a_i, K_i, v_i, w_i zijn gegeven positieve getallen).

- (a). Welke producten moeten worden gemaakt en in welke hoeveelheden zodat de totale netto winst maximaal is? Formuleer dit als een geheeltallig LP-probleem. Geef duidelijk de betekenis aan van de door u gebruikte beslissingsvariabelen.
- (b). Welke lineaire restricties moeten aan het geheeltallig LP-probleem worden toegevoegd om de volgende eisen te modelleren? De eerste eis is dat product 7 niet kan worden gemaakt in het geval dat zowel product 3 als product 5 wordt gemaakt. De tweede eis is dat niet meer dan drie van de vijf producten 1,3,5,8,10 kunnen worden gemaakt als product 4 zou worden gemaakt.
- (c). Hoe modelleert u de volgende twee extra eisen. De eerste extra eis is dat 5 òf 10 eenheden van produkt 7 zouden moeten worden gemaakt als besloten wordt product 7 te maken. De tweede extra eis is dat het niet zo kan zijn dat zowel de gezamenlijke productiehoeveelheden van de producten 1 en 2 de waarde 100 overschrijdt als de gezamenlijke productiehoeveelheden van de producten 5 en 8 de waarde 100 overschrijdt.

Puntentoekenning: elke opgave 18 punten

opgave 1, 18 punten,

opgave 2(a), 3 punten 2(b)-(d): 5 punten per onderdeel,

opgave 3(a)-(f), elk onderdeel 3 punten,

opgave 4(a)-(c), elk onderdeel 6 punten.

Eindcijfer

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{8} \quad (\text{plus eventueel bonus 0.5 punt}).$$