

TENTAMEN INLEIDING BESLISKUNDE
28 april 2003, 9.30 – 12.30 uur



REKENMACHINE TOEGESTAAN

DIT TENTAMEN BESTAAT UIT 5 OPGAVEN

Opgave 1

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 \\ \text{onder} \quad & 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 + 15x_2 + 6x_3 \leq 25 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de standaardvorm door verschilvariabelen x_4 en x_5 toe te voegen.
- (b). Kies de verschilvariabelen x_4 en x_5 als de startoplossing van de simplex-methode en pas één iteratie toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Beargumenteer de keuzes die je doet om de oorspronkelijke basisoplossing te veranderen in deze nieuwe basisoplossing. Geef de basisvorm van het LP-probleem behorende bij de nieuwe basisoplossing.
- (c). Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde? Hoe kun je van de nieuwe basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dat hier het geval?
- (d). Formuleer van het oorspronkelijke LP-probleem (1) in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem. Als de gevonden oplossing in onderdeel (c) optimaal zou zijn, van welk duale variabele weet je dan zijn waarde? En wat is dan de optimale criteriumwaarde van het duale probleem?

Opgave 2

De ijsmaker Peppino produceert vier soorten verpakt ijs in in pakjes met verschillende verhoudingen van de drie basisingrediënten melk, suiker en vruchten. De volgende tabel geeft van elk pakje de benodigde hoeveelheden van deze basisingrediënten en de prijs waarvoor Peppino ze verkoopt. Daarnaast staat in de tabel hoeveel er per dag beschikbaar is aan deze basisingrediënten.

	soort 1	soort 2	soort 3	soort 4	beschikbaar
melk	15 ml	20 ml	25 ml	30 ml	12000 ml
suiker	15 gr	10 gr	20 gr	15 gr	10000 gr
vruchten	25 gr	15 gr	10 gr	5 gr	8000 gr
prijs	€ 5	€ 4.5	€ 5.5	€ 3.5	

Om bij de beschikbare hoeveelheden basisingrediënten dagelijks zoveel van elk ijssoort te produceren dat de totale inkomsten maximaal zijn, lost Peppino het volgende LP-probleem op:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 4.5x_2 + 5.5x_3 + 3.5x_4 \\
 \text{onder} \quad & 1. \quad 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 30x_4 \leq 12000 \\
 & 2. \quad 15x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 15x_4 \leq 10000 \\
 & 3. \quad 25x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 8000 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

NB1: er hoeft geen rekening gehouden te worden met de inkoopkosten van de ingrediënten.

NB2: oplossingen mogen fractioneel zijn.

De computeruitvoer van ORSTAT2000 staat hieronder.

SIMOPT Version 2.1

IEOR VU Amsterdam

The following model was read:

Objective Function :

$$\text{MAX } 5.0000 \text{ X1} + 4.5000 \text{ X2} + 5.5000 \text{ X3} + 3.5000 \text{ X4}$$

Subject to :

1. $15.0000 \text{ X1} + 20.0000 \text{ X2} + 25.0000 \text{ X3} + 30.0000 \text{ X4} \leq 12000.0000$
2. $15.0000 \text{ X1} + 10.0000 \text{ X2} + 20.0000 \text{ X3} + 15.0000 \text{ X4} \leq 10000.0000$
3. $25.0000 \text{ X1} + 15.0000 \text{ X2} + 10.0000 \text{ X3} + 5.0000 \text{ X4} \leq 8000.0000$

Summary of Results

Value Objective Function : 2918.5185

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	162.9630	0.0000
X2 :	14.8148	0.0000
X3 :	370.3704	0.0000
X4 :	0.0000	1.8889

	Slack of Surplus	Shadow prices
	-----	-----
Constraint 1	0.0000	0.1296
Constraint 2	0.0000	0.0741
Constraint 3	0.0000	0.0778

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	5.0000	[3.5714 , 7.1875]
X2	4.5000	[3.2500 , 5.0263]
X3	5.5000	[4.5909 , 7.2500]
X4	3.5000	[-Infinity , 5.3889]

Right-Hand-Side Ranges

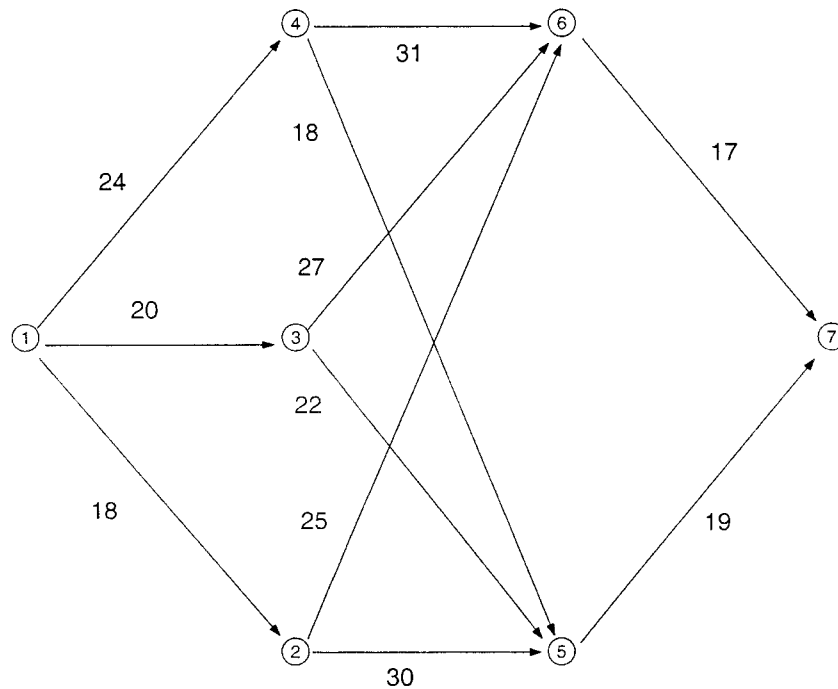
Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	---	-----
1.	12000.0000	[11857.1429 , 14750.0000]
2.	10000.0000	[6857.1429 , 10105.2632]
3.	8000.0000	[7333.3333 , 16333.3333]

Geef een **beargumenteerd** antwoord op de volgende vragen.

- Wat is de oplossing van LP probleem en hoeveel bedragen de dagelijkse inkomsten?
- Stel dat Peppino besluit om de prijs van ijssoort 1 te verhogen tot € 7 per pakje. Zou de optimale oplossing veranderen? Zo nee, hoeveel meer inkomsten per dag zijn er dan?
- Stel dat er dagelijks slechts 7500 gram vruchten beschikbaar zijn, (in plaats van 8000 gram). Nemen de dagelijkse inkomsten dan toe of af? Met hoeveel? Wat kun je zeggen over de toe- of afname van de inkomsten als er dagelijks slechts 7000 gram vruchten beschikbaar zijn?
- Wat gebeurt er met de optimale oplossing als er 10% meer melk en 10% meer vruchten beschikbaar zijn?
- Peppino overweegt een vijfde ijssoort te produceren bestaande uit 20 ml melk, 20 gr suiker en 20 gr vruchten per pakje. Bij welke prijs per pakje wordt het interessant om deze soort te produceren?

Opgave 3

Beschouw het volgende netwerk.



- (a). De getallen bij de pijlen stellen afstanden voor. Bepaal met Dijkstra's algoritme de route van knooppunt 1 naar knooppunt 7 waarvoor de totale afstand minimaal is. Laat duidelijk de berekeningen in de iteraties zien.
- (b). De getallen bij de pijlen zijn percentages waarmee een boodschap over de desbetreffende verbinding verloren gaat. Men zoekt een route waarover een boodschap verzonden in knooppunt 1 met zo groot mogelijke kans aankomt in knooppunt 7. Geef aan hoe je dit probleem kunt oplossen met Dijkstra's algoritme. (Voer de berekeningen niet uit.)

Opgave 4

Wijnverkoper Vigneau heeft de exclusieve rechten om in Nederland de wijn van Chateau Floire te verkopen. Vigneau koopt deze wijn in voor € 15 per fles, de wekelijkse vraag is 75 flessen, en de voorraadkosten bedragen wekelijks 2% over de inkoopprijs. Chateau Floire rekent per bestelling € 245 aan kosten. Vigneau wil de totale wekelijkse kosten minimaliseren onder de restrictie dat hij altijd aan de vraag kan voldoen.

- (a). Welk voorraadmodel is hier van toepassing? Hoe luidt de formule van de optimale bestelgrootte? Definieer hierin alle parameters.
- (b). Bereken met deze formule de optimale bestelgrootte voor Vigneau en de daarbij behorende wekelijkse bestel- en voorraadkosten.
- (c). Veronderstel dat Chateau Floire een korting geeft van 25% op de inkoopprijs per fles als van Vigneau minstens 400 flessen per keer bestelt. Zal Vigneau op dit aanbod ingaan? Zo ja, wat wordt zijn nieuwe bestelgrootte?

Vigneau kondigt aan te stoppen met de verkoop van de Chateau Floire wijn. Zijn trouwe klanten belooft hij nog zes weken lang te voorzien van deze wijn. Zij vragen de volgende aantallen flessen.

week 1	week 2	week 3	week 4	week 5	week 6
150	200	300	150	250	175

De waarden voor de kostfactoren zijn dezelfde als eerder, de kortingregeling geldt niet meer. Vigneau wil de totale bestel- en voorraadkosten over deze 6 weken minimaliseren gegeven dat de huidige voorraad nul is, en onder restrictie dat hij steeds aan de vraag kan voldoen.

- (d). Beschrijf de heuristiek van Silver-Meal om een goede (sub-optimale) oplossing te vinden van dit probleem.
- (e). Bereken met behulp van deze heuristiek de bestelstrategie voor Vigneau en de daarbij behorende totale bestel- en voorraadkosten.

Opgave 5

Michel Schoenmaker brengt zijn auto ieder half jaar naar de garage waarbij hij moet besluiten of hij zijn auto een beurt geeft (d.w.z. kleine reparaties laat verrichten) of inruilt voor een nieuwe. Is de auto 2 jaar oud, dan vervangt Michel sowieso voor een nieuwe. Een nieuwe auto kost € 50000, terwijl de kosten van een beurt en de inruilwaarde afhangen van de 'leeftijd' van de auto volgens onderstaande tabel.

leeftijd	1	2	3	4
kosten beurt	200	500	800	
inruilwaarde	45000	40000	36000	32000

NB: leeftijd is de ouderdom van de auto gemeten in halve jaren; kosten en inruilwaarde zijn in €.

Op 1 januari 2004 koopt Michel een nieuwe auto en vanaf 1 januari 2007 is hij van plan autoloos te gaan leven. Voor de tussenliggende periode (1/1/2004 – 31/12/2006, zes halfjaar termijnen) streeft hij een optimaal beurt/inruilstrategie na.

Gevraagd wordt om dit probleem te formuleren als een dynamisch programmeringsprobleem in een acyclisch netwerk.

- Teken het netwerk en geef de betekenis van een punt (of toestand), en een pijl (of actie) in het netwerk.
- Bereken de kosten bij elke pijl.
- Definieer de waardefunctie en stel de recursierelatie op.
- Voer het DP-algoritme uit om een optimale strategie te bepalen.

Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	20	3	10	3	4	
2	20	2	4	5	4	5
3	15	10	5			
4	25	4	5	5	5	6
5	20	3	5	4	8	