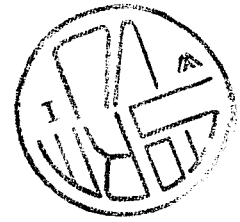


DEELTENTAMEN D2 INLEIDING BESLISKUNDE
20 december 2002, 15.15-17.15 uur



REKENMACHINE TOEGESTAAN

Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
1	30	5	2	3	10	10			
2	40	2	5	4	4	5	4	8	8
3	30	3	2	15	5	5			

Opgave 1

De Europese Unie overweegt om zes Europese hoofdsteden (Amsterdam, Brussel, Kopenhagen, Londen, Parijs, Wenen) onderling te verbinden via een nieuw communicatienetwerk van ondergrondse kabels. De afstanden tussen de steden staan in onderstaande tabel, waarin een streepje betekent dat de desbetreffende directe verbinding niet in aanmerking komt om bekabeld te worden. Men is uiteraard geïnteresseerd in het netwerk met de kortste totale kabellengte.

	A	B	K	L	P	W
A	–	200	750	–	500	–
B	200	–	900	350	–	1100
K	750	900	–	–	–	1200
L	–	350	–	–	450	1500
P	500	–	–	450	–	1150
W	–	1100	1200	1500	1150	–

Tabel 1. Afstandstabel. Steden bij hun eerste letter.

- Teken het netwerk van steden en alle verbindingen waar mogelijk een kabel gelegd kan worden.
- Hoeveel directe verbindingen moet men minstens aanleggen om alle zes steden onderling te verbinden?
- Stel men besluit de volgende kabels aan te leggen: Amsterdam-Brussel, Amsterdam-Kopenhagen, Amsterdam-Parijs, Brussel-Wenen, Londen-Wenen, en Parijs-Wenen. Hoe zie je direct dat dit nooit een optimaal communicatienetwerk kan zijn?
- Met welk algoritme kan men de kortste totale kabellengte vinden? Formuleer in detail dit algoritme en geef een stappenplan.
- Bereken met dit algoritme de totale lengte van de benodigde kabels, en teken het resulterende netwerk.

Opgave 2

De Oudhollandsche Backerij van van Tulderen, gevestigd in Heerhugowaard, is wijd en zijd bekend om zijn boterkoekjes. Om aan de vraag naar deze koekjes te voldoen is dagelijks

32 pond boter nodig die van Tulderen betreft van de provinciale groothandel Migros. Per bestelling rekent Migros € 22 aan administratieve kosten terwijl de inkoopprijs van boter € 1,10 is per pond. De levertijd van Migros is 2 dagen. Tenslotte schat van Tulderen in dat de voorraadkosten van boter dagelijks 5% zijn over de inkoopprijs. Van Tulderen wil de totale kosten per dag minimaliseren onder de restrictie dat hij altijd aan de vraag naar de boterkoekjes kan voldoen.

- (a). Welk voorraadmodel is hier van toepassing?
- (b). Hoe luidt de formule van de optimale bestelgrootte? Definieer hierin alle parameters.
- (c). Bereken met deze formule de bestelgrootte voor van Tulderen en de daarbij behorende dagelijkse bestel- en voorraadkosten.
- (d). Wanneer moet van Tulderen een bestelling plaatsen? Hoe vaak moet van Tulderen per jaar bestellen (van Tulderen is 300 dagen per jaar open)?
- (e). Veronderstel dat Migros een korting geeft van 15% op de inkoopprijs als van Tulderen minstens 180 pond per keer besteld. Wat is nu de optimale bestelgrootte?

Iedere eerste week van augustus is er kermis in Heerhugowaard en de enorme toeloop doet de plaatselijke Albert Heijn besluiten ook boterkoekjes te verkopen. Albert Heijn koopt de kant-en-klare koekjes bij van Tulderen die daardoor zo veel meer moet bakken dat hij weet dat hij de volgende hoeveelheden boter nodig heeft in die dagen (inclusief de dagelijkse 32 pond):

1 aug	2 aug	3 aug	4 aug	5 aug	6 aug	7 aug
90	100	80	150	75	100	175

Tabel 2. Benodigde boter in ponden.

De waarden voor de kostfactoren zijn dezelfde als eerder. Neem verder aan dat van Tulderen op 1 augustus (aan het begin) geen voorraad boter meer heeft, en dat de groothandel Migros nu direct levert. Van Tulderen wil de totale bestel- en voorraadkosten over deze week minimaliseren onder de restricties dat hij aan de vraag naar koekjes steeds kan voldoen en dat hij aan het eind van de week geen boter meer heeft.

- (f). Veronderstel dat van Tulderen de volgende bestelstrategie volgt:

1 aug	2 aug	3 aug	4 aug	5 aug	6 aug	7 aug
450	0	0	0	320	0	0

Tabel 3. Bestellingen van van Tulderen.

Bereken de bijbehorende totale bestel- en voorraadkosten. Hoe kun je direct zien dat dit nooit een optimale bestelstrategie kan zijn?

- (g). Beschrijf de heuristiek van Silver-Meal om een goede (sub-optimale) oplossing te vinden van dit probleem.
- (h). Bereken met behulp van deze heuristiek de bestelstrategie voor van Tulderen en de daarbij behorende totale bestel- en voorraadkosten.

Opgave 3

Ferry en Mat zijn twee broers die de nalatenschap van hun suikeroom Pim erven. De erfenis bestaat uit n objecten. Object j ($j = 1, 2, \dots, n$) heeft voor broer i ($i = 1$ voor Ferry en $i = 2$ voor Mat) een waarde w_{ij} . De twee willen natuurlijk hun gezamenlijke totale waarde aan geërfde stukken maximaliseren. Echter, oom Pim heeft in zijn testament de volgende voorwaarden gezet: (i) een object mag niet gedeeld worden, (ii) de broers mogen elk maar één keer hun auto volladen met de objecten naar hun keuze. Broer i ($i = 1, 2$) heeft een auto met een volume-inhoud v_i (m^3) en hij kan met hulp van zijn vrouw het object j ($j = 1, 2, \dots, n$) zo inpakken dat het a_{ij} (m^3) in beslag neemt. Kortom, het vraagstuk waarvoor de broers zich gesteld zien, is het volgende erfenisprobleem:

$$\max \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{onder } \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq v_i, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$x_{1j} + x_{2j} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (4)$$

Veronderstel dat gegeven is $n = 6$, $v_1 = 10$, $v_2 = 15$ en

	object 1	object 2	object 3	object 4	object 5	object 6
w_{1j}	17	25	13	10	15	12
w_{2j}	12	18	20	18	10	15
a_{1j}	3	5	4	2	5	3
a_{2j}	4	3	6	6	2	4

Tabel 4. De waarden en volumens van de objecten.

- Geef de interpretatie van de beslissingsvariabelen x_{ij} in (4) en de betekenis van de restricties (2) en (3).
- Vind een toegelaten oplossing van het erfenisprobleem en bereken de bijbehorende totale waarde (criteriumwaarde).

We zullen het erfenisprobleem formuleren als een dynamisch programmeringsprobleem (DP). Om je op weg te helpen zullen we een drie stappenplan volgen.

- (Stap 1). Veronderstel, broer Mat bestaat niet, en Ferry mag elk object ook meer dan één keer kiezen. Ferry wil weer zijn totale erfwaarde maximaliseren, nog wel onder de restrictie dat het in zijn auto past.
 - Formuleer dit probleem eerst als een geheeltallig lineair programmeringsprobleem.
 - Onder welke naam staat dit probleem bekend?
 - Formuleer dit probleem nu als een DP in een acyclisch netwerk. Geef eerst de betekenis van een punt (of toestand), en een pijl (of actie) in het netwerk. Definieer dan de waardefunctie en stel de recursierelatie op.
 - Voer de berekeningen uit.

- (d). (Stap 2). Veronderstel net als in (c) dat broer Mat niet bestaat, maar nu mag Ferry elk object hoogstens één keer kiezen.
- (i) Welke restricties moet je toevoegen aan het geheeltallig lineair programmeringsprobleem van onderdeel (c)(i)?
 - (ii) Formuleer een dynamisch programmeringsmodel om het probleem op te lossen. Hint: breid de toestanden van (c) uit met informatie over de status van de objecten. Definieer dan de waardefunctie en stel de recursierelatie op.
- (e). (Stap 3). Tenslotte kun je nu een dynamisch programmeringsmodel formuleren om het oorspronkelijke erfenisprobleem van de twee broers op te lossen. Hint: breid de toestanden van (d) nogmaals uit! Definieer dan de waardefunctie en stel de recursierelatie op.

Cijfer van deeltentamen exclusief bonus en vóór afronding:

$$\frac{\text{aantal behaalde punten}}{10}.$$