

**Opgave 1**

De volgende 6 punten $(x_i, y_i)_{i=1}^6$ worden in het platte vlak gegeven:

x_i	0.50	2.00	3.00	4.50	6.00	8.00
y_i	4.45	3.73	4.11	3.99	4.39	4.26

Aan deze punten willen we een curve van de vorm $y = a + b \sin(2\pi x)$ aanpassen zodat de som van de absolute afwijkingen

$$\sum_{i=1}^6 |y_i - (a + b \sin(2\pi x_i))|$$

minimaal is.

- (a). Formuleer een LP-probleem waarmee de waarden van a en b kunnen worden berekend.

Opgave 2

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{onder} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 22 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- (a). Breng dit LP-probleem in de standaardvorm door verschilvariabelen x_4 en x_5 toe te voegen.
- (b). Geef de definitie van de begrippen basisvariabelen, niet-basisvariabelen en basisvorm van een LP-probleem.
- (c). Kies hier de verschilvariabelen x_4 en x_5 als de startoplossing, en breng dan het LP-probleem in de bijbehorende basisvorm.
- (d). Pas één iteratie van de simplex-methode toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te berekenen. Beargumenteer de keuzes die je doet om de oorspronkelijke basisoplossing te veranderen in deze nieuwe basisoplossing. Geef de basisvorm van het LP-probleem behorende bij de nieuwe basisoplossing.
- (e). Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde?
- (f). Hoe kun je van de basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dat hier het geval?
- (g). Formuleer van het oorspronkelijke LP-probleem (1) in ongelijkheidsvorm het duale LP-probleem.
- (h). Als de gevonden primale oplossing in onderdeel (e) optimaal is, van welke duale variabele weet je dan zijn waarde? En wat is dan de optimale criteriumwaarde van het duale probleem?

Opgave 3

De Tielse Vruchtensap Centrale (TVC) produceert de sinaasappeldrank Sinapje in pakken van één liter. De Warenwet eist dat één liter Sinapje minstens 1 gram kalium, 60 mg vitamine C en 0.25 mg foliumzuur (vitamine B11) bevat. Sinapje wordt gemaakt uit het sap van geperste sinaasappelen, die TVC koopt bij vier fruittelers in de Betuwe. De sinaasappelen van deze vier telers bevatten de genoemde mineralen en vitamines in verschillende hoeveelheden, die worden gegeven in de volgende tabel.

	kalium in gr.	vitamine C in mg.	foliumzuur in mg.
teler 1	0.90	90	0.50
teler 2	1.50	50	0.15
teler 3	0.75	40	0.40
teler 4	1.75	74	0.10

Tabel 1. Gehaltes per kg. geperste sinaasappelen.

Dus het sap van één kg. sinaasappelen van teler 1 bevat 0.9 gram kalium, 45 mg vitamine C en 1 mg foliumzuur. Enz. In elk pak Sinapje gaat het sap van precies één kilo geperste sinaasappelen, waarbij het is toegestaan dat sinaasappelen van verschillende telers gebruikt worden. De inkooprijzen per kg. sinaasappelen zijn bij de afzonderlijke fruittelers: 20, 10, 15 en 12.5 eurocent.

Om tegen zo laag mogelijke kosten een pak Sinapje te produceren dat aan de eisen voldoet, lost TVC het volgende LP-probleem op:

$$\begin{array}{ll}\min & 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 12.5x_4 \\ \text{onder} & 1. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & 2. \quad 0.9x_1 + 1.5x_2 + 0.75x_3 + 1.75x_4 \geq 1 \\ & 3. \quad 90x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 74x_4 \geq 60 \\ & 4. \quad 0.5x_1 + 0.15x_2 + 0.4x_3 + 0.1x_4 \geq 0.25 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{array}$$

De computeruitvoer van ORSTAT2000 staat hieronder.

SIMOPT Version 2.1

IEOR VU Amsterdam

The following model was read:

Objective Function :

MIN 20.0000 X1 +10.0000 X2 +15.0000 X3 +12.5000 X4

Subject to :

1. 1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3 +1.0000 X4 = 1.0000
2. 0.9000 X1 +1.5000 X2 +0.7500 X3 +1.7500 X4 >= 1.0000
3. 90.0000 X1 +50.0000 X2 +40.0000 X3 +74.0000 X4 >= 60.0000
4. 0.5000 X1 +0.1500 X2 +0.4000 X3 +0.1000 X4 >= 0.2500

Summary of Results



Value Objective Function : 12.7778

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
X1 :	0.2593	0.0000
X2 :	0.7037	0.0000
X3 :	0.0370	0.0000
X4 :	0.0000	2.2778

	Slack of Surplus	Shadow prices
	-----	-----
Constraint 1	0.0000	3.8889
Constraint 2	0.3167	0.0000
Constraint 3	0.0000	0.0556
Constraint 4	0.0000	22.2222

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
X1	20.0000	[17.0000 , 25.5909]
X2	10.0000	[2.5000 , 11.6712]
X3	15.0000	[12.0433 , 17.1429]
X4	12.5000	[10.2222 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	---	-----
1.	1.0000	[0.9565 , 1.2500]
2.	1.0000	[-Infinity , 1.3167]
3.	60.0000	[46.0000 , 61.4286]
4.	0.2500	[0.2375 , 0.3687]

- (a). Geef een interpretatie van de beslissingsvariabelen x_j , $j = 1, 2, 3, 4$.
- (b). Wat is TVC minimaal kwijt per pak Sinapje aan inkoopkosten van sinaasappelen? Hoeveel sinaasappelen van de afzonderlijke telers gaan er dan in een pakje (uitgedrukt in kg.)?
- (c). Wat is de betekenis van de schaduwprijs ('shadow price') 22.2222 van restrictie ('constraint') 4?

Geef een **beargumenteerd** antwoord op de volgende vragen.

- (d). Stel dat de inkoopprijs van teler 1 niet 20 maar 18 eurocent per kg blijkt te zijn. Zou de optimale oplossing veranderen? Zo nee, hoe groot zijn dan de inkoopkosten van sinaasappelen voor een pak Sinapje?

- (e). Stel dat de samenstelling van een pak Sinapje zo zou moeten zijn dat het tenminste 55 mg vitamine C bevat (in plaats van 60 mg). Nemen de kosten dan toe of af? Met hoeveel? Wat kun je zeggen over de toe- of afname van de kosten als de eis zou zijn dat er tenminste 45 mg. vitamine inzit?
- (f). Wat gebeurt er met de optimale oplossing als alle fruittelers hun prijzen met 5% per kg. verhogen?
- (g). TVC overweegt een vijfde fruitteler bij de inkoop te betrekken. Deze teler vraagt 25 eurocent per kg. sinaasappelen. Een kg. sinaasappelen van teler 5 bevat 1 gram kalium, 60 mg vitamine C en 0.2 mg foliumzuur. Zou in een nieuwe optimale oplossing TVC bij deze fruitteler sinaasappelen inkopen?

Opgave 4

Na uitvoering van het satirische toneelstuk 'Yup en Yul' door de toneelgroep Sater in de Stadsschouwburg zijn op de Amsterdamse grachtengordel heftige onlusten uitgebroken. De onlusten concentreren zich bij het huis van de cabaretier Youp de Hacker op de Prinsengracht, bij het universiteitsinstituut van de cultuursocioloog Bram Zwetsloot op de Keizersgracht en bij het schrijverscafé De Rode Neus achter het Spui. De aanwezige politiecommandanten op deze drie plekken hebben bij het hoofdbureau om versterking gevraagd: 7 extra manschappen voor de Prinsengracht, 4 extra voor de Keizersgracht en 12 extra voor het Spui. Commissaris Baantjer moet onverwijld beslissen hoe versterkingen te sturen vanuit de bureaus Marnixstraat, Nieuwe Zijds en Warmoesstraat al waar respectievelijk 10, 5 en 8 manschappen nog ter beschikking staan. De commissaris besluit tot de volgende verdeling van manschappen

	naar			totaal
	Prinsengracht	Keizersgracht	Spui	
Marnixstraat	3	2	5	10
van Nieuwe Zijds	0	0	5	5
Warmoesstraat	4	2	2	8
totaal	7	4	12	23

Tabel 2. Verdeling van manschappen.

De volgende dag wordt de rampzalig uitgevallen beslissing van de hoofdcommissaris op het stadhuis geëvalueerd. De commissaris verdedigt zich door te stellen dat, overeenkomstig de vigerende regels, hij gekozen heeft voor een verdeling waarvoor de som van alle reistijden om de manschappen ter plekke te krijgen minimaal is. In onderstaande tabel worden de reistijden in minuten van de verschillende bureaus naar de onheilsplekken gegeven:

	naar		
	Prinsengracht	Keizersgracht	Spui
Marnixstraat	2	3	4
van Nieuwe Zijds	3	4	2
Warmoesstraat	5	3	3

Tabel 3. Reistijden.

(Voor alle duidelijkheid: de reistijd hangt niet af van het aantal gestuurde manschappen). De burgemeester vraagt advies aan de O(operations)R(research)-deskundige Dr. Reinders van de VU om na te gaan of de oplossing van commissaris Baantjer optimaal is. Daartoe formuleert Dr. Reinders dit probleem als een geheeltallig lineair programmeringsprobleem.

- (a). Welke beslissingsvariabelen zijn nodig in het model? Wat zijn de waarden hiervan in de oplossing van commissaris Baantjer?
- (b). Druk de criteriumfunctie uit als een lineaire functie van de variabelen. En bereken de waarde hiervan voor de oplossing van commissaris Baantjer.
- (c). Formuleer nu het volledige geheeltallige lineaire programmeringsprobleem dat Dr. Reinders heeft opgesteld om de burgemeester te kunnen adviseren.

Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
1	20	20							
2	32	2	4	4	6	4	4	4	4
3	28	4	4	4	4	4	4	4	
4	20	5	5	10					

Cijfer exclusief bonus en vóór afronding:

$$\frac{\text{aantal behaalde punten}}{10}$$