

Tentamen Inleiding Besliskunde voor BWI, 4 mei 2000, 13.30-16.30 uur.

1. Objective Function:

MAX 400.0000 XE +500.0000 XM -100.0000 R0

Subject to :

1. 2.0000 XE +3.0000 XM -1.0000 R0 <= 100.0000
2. 3.0000 XE +2.0000 XM <= 120.0000
3. 1.0000 XE +2.0000 XM <= 70.0000
4. 1.0000 XE >= 20.0000
5. 1.0000 XM >= 25.0000

Summary of Results

Value Objective Function : 19000.0000

Variable	Activity Level	Reduced Cost
-----	-----	-----
XE :	20.0000	0.0000
XM :	25.0000	0.0000
R0 :	15.0000	0.0000

	Slack or Surplus	Shadow Prices
-----	-----	-----
Constraint 1	0.0000	100.0000
Constraint 2	10.0000	0.0000
Constraint 3	0.0000	200.0000
Constraint 4	-0.0000	-0.0000
Constraint 5	0.0000	-200.0000

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
-----	-----	-----
XE	400.0000	[300.0000 , Infinity]
XM	500.0000	[-Infinity , 700.0000]
R0	-100.0000	[-200.0000 , 0.0000]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
-----	-----	-----
1.	100.0000	[-Infinity , 115.0000]
2.	120.0000	[110.0000 , Infinity]
3.	70.0000	[70.0000 , 73.3333]
4.	20.0000	[-Infinity , 20.0000]
5.	25.0000	[22.5000 , 25.0000]

Het bovenstaande is de computeroutput voor het volgende LP-probleem. De juweliersfirma Schaap maakt zelf de ringen Elite en Maxima. Voor de productie van

deze ringen worden robijnen en saffieren gebruikt. Voor één Elite ring zijn nodig: 2 robijnen, 3 saffieren en 1 uur arbeid, terwijl voor één Maxima ring nodig zijn: 3 robijnen en 2 saffieren en 2 uur arbeid. De juweliersfirma heeft 100 robijnen en 20 saffieren in voorraad, maar zou nog extra robijnen kunnen bijkopen voor fl. 100,-- per stuk. Verder is slechts 70 uur arbeid ter beschikking. Er is voldoende vraag naar beide type ringen. De Elite ringen worden verkocht voor fl. 400,-- per stuk en de Maxima ringen voor fl. 500,-- per stuk. Uit marktoverwegingen wil de juweliersfirma tenminste 20 Elite ringen en tenminste 25 Maxima ringen maken. Uiteraard wil de firma de netto opbrengst maximaliseren. Dit leidt tot bovenstaand LP-probleem met als variabelen x_E = aantal te maken Elite ringen, x_M = aantal te maken Maxima ringen en RO = aantal extra in te kopen robijnen. Geef een beargumenteerd antwoord op de volgende vragen:

- (a) Stel dat i.p.v. fl. 100 een extra robijn fl. 190 kost. Koopt de juwelier dan nog steeds extra robijnen in en wat wordt de nieuwe optimale oplossing?
- (b) Met hoeveel verandert de maximale netto winst als eis dat tenminste 25 Maxima ringen moeten worden gemaakt wordt verzwakt tot de eis dat tenminste 23 van deze ringen moeten worden gemaakt?
- (c) De juweliersfirma kan beschikken over 5 uren extra arbeidskracht tegen een totaalbedrag van fl. 1050. Is het zinvol hiervan gebruik te maken?
- (d) Wat heeft de firma hooguit over voor 1 extra saffier?
- (e) Stel dat de firma ook de Alex ring zou kunnen maken naast de andere twee ringen. Een Alex ring verkoopt voor fl. 550 per stuk en vereist 4 robijnen, 2 saffieren en 1 uur arbeid. Is het winstgevend deze ring te maken?
- (f) Stel dat de verkoopprijzen van een Elite ring en een Maxima ring niet fl. 400 en fl. 500 zijn, maar fl. 350 en fl. 550. Maak je dan meer Maxima ringen of minder Elite ringen?

2(a) Geef het duale probleem van het LP-probleem in opgave 1. Wat is de optimale oplossing en de optimale criteriumwaarde van dit duale LP-probleem?

(b) Stel dat 10 puntenparen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ gegeven zijn dan dat daaraan een functie van de vorm $y = a \cos(x) + b \sin(x)$ willen aanpassen zodat de som $\sum_{i=1}^n |y_i - a \cos(x_i) - b \sin(x_i)|$ minimaal is. Formuleer de bepaling van a en b als een LP-probleem.

3(a). Geef een afleiding van de wortelformule van Camp (de EOQ-formule). Specificeer de voorwaarden waaronder deze formule geldt en de betekenis van de kostenparameters die u in uw afleiding gebruikt.

(b) Stel dat een munt blindelings wordt gekozen uit een verzameling van munten waarvan één op de duizend munten aan beide kanten kop heeft. De munt wordt tien keer opgegooid. Elke keer verschijnt kop. Bepaal met een kansboom de kans dat de gekozen munt niet zuiver was.

4(a). Beschouw een gericht netwerk met N nodes $N_1, \dots, N_n$ waarbij c_{ij} de directe reisafstand is van node N_i naar N_j . Formuleer in algemene notatie het algoritme van Dijkstra. Geef precies de betekenis aan van de door u gebruikte notatie. Hoe vind je aan het eind van de berekeningen het kortste pad van de beginnode N_s naar een andere node N_c ? Waaraan moeten de getallen c_{ij} voldoen om Dijkstra te kunnen toepassen?

(b) Beschouw opnieuw een gericht netwerk met N nodes $N_1, \dots, N_n$. We willen een boodschap sturen van node N_1 naar node N_n . Als de boodschap door de pijl van node N_i naar node N_j gaat dan is er een gegeven kans p_{ij} dat de boodschap verloren gaat. Hoe kun je met Dijkstra een pad berekenen van node N_1 naar node N_n zodat met maximale kans de boodschap aankomt in node N_n als deze verstuurd wordt vanuit N_1 ?

5. Een fabriek moet voor de komende weken $t=1, \dots, T$ voorgeschreven geheeltallige hoeveelheden $D_1, \dots, D_T$ van een bepaald product leveren. Er moet stipt geleverd worden, d.w.z. nalevering is niet toegestaan. De beginvoorraad bij de fabriek van dit product is nul. Aan het begin van elke week kan het product in elke gewenste hoeveelheid geproduceerd worden en het product kan gedurende elke gewenste tijd in voorraad gehouden worden. De productietijd is verwaarloosbaar zodat de productie eventueel diezelfde week gebruikt kan worden om aan de vraag te voldoen. Wel is het zo dat elke keer vaste opstartkosten $K > 0$ worden gemaakt als een productie wordt gestart terwijl de week daarvoor geen productie had plaatsgevonden. Voor elke eenheid product die aan het eind van de week in voorraad is worden voor die week voorraadkosten $h > 0$ gemaakt.

(a) Formuleer het ontwerpen van een productieschema waarvoor de totale kosten minimaal zijn als een geheeltallig LP-probleem. (aanwijzing: neem in ieder geval als variabelen x_i = productiehoeveelheid in week i en v_i = de voorraad aan begin week i (= eind week $i-1$)).

(b) Hoe moet de geheeltallige LP-formulering aangepast worden als de volgende extra eisen worden opgelegd:

- als zowel in de periode 3 als in periode 4 geproduceerd wordt, dan kan niet in periode 5 worden geproduceerd.
- als zowel in periode 3 als in periode 4 geproduceerd wordt, dan worden extra vaste kosten K_0 gemaakt.

- in periode 7 moet de productiegraote of 0 zijn of tenminste 20 zijn.
 - als in periode 8 de productiegraote positief is, dan moet deze kleiner dan of gelijk aan 10 zijn.
- (c) Voor het probleem uit de vraagstelling (a), laat zien dat dit ook geformuleerd kan worden als een kortste pad probleem op een acyclisch netwerk en formuleer in algemene termen het bijbehorende dynamische programmeringsalgoritme.

Puntentoeckenning:

Som 1a, 1b, 1c, 1d, 1e en 1f elk 3 pt.; som 2a, 2b, elk 9 pt.; som 3a, 3b elk 9 pt.; som 4a, 4b elk 9 pt.; som 5a, 5b, 5c elk 6 pt. Eindcijfer = 1 + aantal punten/10.