

- Maak alle opgaven.
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

- (1) Zij $\varphi : G \rightarrow H$ een homomorfisme van groepen en $N \leq G$.
- (a) Laat zien dat $\varphi(N) \leq H$.
 - (b) Laat zien dat als $N \trianglelefteq G$ en φ surjectief is, dan is $\varphi(N) \trianglelefteq H$.
- (2) **Formuleer in deze opgave ook expliciet de resultaten en stellingen die je gebruikt.**

Zij p een priemgetal en

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a \text{ en } c \text{ in } \mathbb{F}_p^* \text{ en } b \text{ in } \mathbb{F}_p \right\},$$

een ondergroep van $GL_2(\mathbb{F}_p)$, de inverteerbare 2×2 -matrices met coëfficiënten in $\mathbb{F}_p$.

- (a) Laat zien dat de afbeelding $G \rightarrow \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p^*$ gegeven door $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = (a, c)$ een homomorfisme is met kern

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } b \text{ in } \mathbb{F}_p \right\}.$$

- (b) Laat zien dat er een isomorfisme $G/N \simeq \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p^*$ is.
 - (c) Toon nu aan dat $[G, G] = N$ als $p \neq 2$.
- (3) Zij $n \geq 2$ en $H \leq S_n$ met $S_{n-1} \leq H$. We laten H op $X = \{1, 2, \dots, n\}$ werken via $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.
- (a) Laat zien dat dit inderdaad een werking van H op X is.
 - (b) Toon aan dat voor $H \neq S_{n-1}$ de baan $H \cdot n$ gelijk is aan X .
 - (c) Beredeneer nu dat $H = S_{n-1}$ of $H = S_n$. Formuleer hierbij resultaten en stellingen die je gebruikt.
- (4) Zij G een groep met 15 elementen.
- (a) Leg uit waarom er een element x van orde 3 en een element y van orde 5 is in G .
 - (b) Toon aan dat $xyx^{-1} = y^i$ voor een i in $\{1, 2, 3, 4\}$.
 - (c) Laat zien dat G abels is.

Normering			
1a: 7	2a: 8	3a: 8	4a: 6
1b: 7	2b: 10	3b: 8	4b: 8
	2c: 10	3c: 10	4c: 8
Maximum totaal = 90			
Cijfer = 1 + Totaal/10			