

- Maak alle opgaven.
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

- (1) Zij  $\sigma$  het element  $(1\ 3\ 4\ 7\ 2\ 5)(1\ 2\ 3\ 4)$  in  $S_9$ .
- Schrijf  $\sigma$  als product van disjuncte cycli.
  - Wat is de orde van  $\sigma$ ?
- (2) Hoeveel elementen van  $S_5$  hebben orde 2? Schrijf die niet allemaal op maar leg wel het gevonden aantal uit.

- (3) Zij

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a \text{ en } c \text{ in } \{1, -1\} \text{ en } b \text{ in } \mathbb{Z} \right\},$$

een ondergroep van  $GL_2(\mathbb{Q})$ , de inverteerbare  $2 \times 2$ -matrices met rationale coëfficiënten.

- Laat zien dat  $\varphi : G \rightarrow \{1, -1\}$  gegeven door  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto ac$  een homomorfisme is.
  - Laat zien dat  $\ker(\varphi)$  wordt voortgebracht door  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (4) Zij  $G = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$  de diëdergroep met 12 elementen.
- Bepaal het centrum  $Z(G)$  van  $G$ . (Hint:  $G$  wordt voortgebracht door  $r$  en  $s$ .)
  - Bepaal de normalizator  $C_G(A)$  voor  $A = \{s, sr^2\}$
  - Laat zien dat  $H = \{e, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  een ondergroep is van  $G$ . (Dit kan op een handige manier door typen elementen te bekijken.)
- (5) Gegeven is de ondergroep

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } \bar{a} \text{ in } \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} \text{ en } \bar{b} \text{ in } \mathbb{F}_7 \right\}$$

van  $GL_2(\mathbb{F}_7)$ , de inverteerbare  $2 \times 2$ -matrices met coëfficiënten modulo 7.

- Laat zien dat  $G$  één element van orde 1 heeft, 14 elementen van orde 3, en zes elementen van orde 7. Deel hiervoor de elementen in bepaalde types in.

Zij

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } \bar{b} \text{ in } \mathbb{F}_7 \right\}$$

de ondergroep van  $G$  voortgebracht door  $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Leg uit waarom een ondergroep  $H$  van  $G$  met  $H \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  uit 1 of 3 elementen bestaat.

| Normering              |       |        |       |        |
|------------------------|-------|--------|-------|--------|
| 1a: 9                  | 2: 12 | 3a: 6  | 4a: 9 | 5a: 11 |
| 1b: 6                  |       | 3b: 10 | 4b: 9 | 5b: 9  |
|                        |       |        | 4c: 9 |        |
| Maximum totaal = 90    |       |        |       |        |
| Cijfer = 1 + Totaal/10 |       |        |       |        |