

1a Beschouw een simpele, samenhangende graaf G met n knopen en m verbindingen (kanten). Welke van de volgende uitspraken zijn altijd waar voor G (het is niet nodig je antwoord te motiveren, een simpel "waar/onwaar" is voldoende):

1. $m \geq n - 1$.
2. G is planair dan en alleen dan als $m \leq 3 \cdot n - 6$.
3. Als er een niet-planaire deelgraaf $H \subseteq G$ bestaat, dan is G ook niet planair.
4. $\chi(G) \leq 4$.
5. $\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2m$.
6. Het totaal aantal oriëntaties van G bedraagt 2^m .
7. Er bestaat een oriëntatie D van G zodanig dat D sterk samenhangend is.
8. Als $L(G)$ de lijngraaf van G is, dan geldt $|E(L(G))| = |V(G)|$.
9. Als G^* een *plane graph* is die isomorf is met G , dan is G planair.
10. Alle *plane graphs* die isomorf zijn met G hebben hetzelfde aantal regionen.

10pt

1b Vertaal de volgende wiskundige uitspraken naar gewoon Engels of Nederlands:

1. $\forall G, E \subseteq E(G) : |E(\overline{G[E]})| \leq |E(G[V(G[E])])|$.
2. G is Hamiltons $\Rightarrow \forall S \subseteq V(G), S \neq \{v\} : \omega(G - S) \leq |S|$.
3. $\forall D, v \in V(D) : N_{out}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V(D), v \neq w \mid \exists a = \langle \overrightarrow{v, w} \rangle : a \in A(D)\}$
4. G is bipartiet if $V(G) = V_1 \cup V_2$ en $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ zodanig dat $E(G) \subseteq \{\langle u_1, u_2 \rangle \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$.
5. $\forall E^* \subseteq E(G) : V^* \stackrel{\text{def}}{=} \{u, v \in V(G) \mid \exists e \in E^* : e = \langle u, v \rangle\}$

10pt

2 Bewijs dat voor elke graaf G geldt dat $e \in E(G)$ is een *cut edge*, dan en alleen dan als $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$.

5pt

3 Bewijs door middel van volledige inductie op het aantal knopen, dat voor een boom met n knopen en m verbindingen, $n = m + 1$.

5pt

4 Bewijs dat voor elke planaire graaf er een knoop v bestaat met $\delta(v) \leq 5$.

5pt

5 Kruskal's algoritme geeft een opspannende boom met minimaal gewicht. Geef een eenvoudige aanpassing die tot een opspannende boom met *maximaal* gewicht leidt.

5pt

6 Pas het volgende algoritme toe op de onderstaande gewogen graaf G . Laat V_{odd} de knopen uit G met oneven graad zijn.

1. Voor elke paar van verschillende knopen $v_i, v_j \in V_{odd}$, vind een (v_i, v_j) -path $P_{i,j}$ met minimaal gewicht.
2. Construeer een gewogen volledige graaf K_n with $n = |V_{odd}|$ knopen uit V_{odd} waarin v_i en v_j verbonden zijn door een kant met gewicht $w(P_{i,j})$.
3. Vind a verzameling kanten E van maximale grootte zodanig dat $w(K_n[E])$ minimaal is en geen twee kanten incident zijn met dezelfde knoop.
4. Voor elke kant $e \in E$, met $e = \langle v_i, v_j \rangle$, dupliceer de kanten van $P_{i,j}$ in graaf G .

10pt

