

Dit tentamen telt voor 50% mee in het eindcijfer van dit vak.

Opgave 1 We bekijken het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(6 - x - 4y), \\ \dot{y} &= y(4 - x - 2y).\end{aligned}$$

- a. [15%] Bereken, lineariseer en classificeer de evenwichtoplossingen van deze vergelijkingen.
- b. [10%] Teken het faseplaatje van de differentiaalvergelijkingen. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 2 [15%] Schets het faseplaatje van de conservatieve differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \sin x = \frac{1}{10}.$$

Een plaatje zonder uitleg volstaat hier. *Hint: identificeer de juiste potentiaal.*

Opgave 3 [15%] We beschouwen de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= 2xy.\end{aligned}$$

Laat zien dat deze vergelijkingen reversibel zijn.

Hint: probeer een tijdsomkeer-symmetrie van de vorm $(x, y, t) \mapsto (\pm x, \pm y, -t)$.

Opgave 4 [20%] Een stelsel differentiaalvergelijkingen wordt in poolcoördinaten als volgt gegeven:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 4 - r + \cos 7\phi, \\ \dot{\phi} &= (r - 2)(r - 6) + \sin 5\phi.\end{aligned}$$

Bewijs dat dit stelsel vergelijkingen een periodieke oplossing heeft die ligt binnen de ring $2 < r < 6$.

Opgave 5 [25%] Laat $0 < \varepsilon \ll 1$ klein zijn en beschouw de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 + \dot{x}^2)x + x = 0.$$

Maak een 2-tijdschalen Ansatz van de vorm

$$x(t) = r \cos(t + \phi(\varepsilon t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ voor een constante } r \geq 0 \text{ en variabele } \phi(T) = \phi(\varepsilon t).$$

Leid af, door termen van orde $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ te onderzoeken, dat

$$\frac{d\phi}{dT} = ar^2 \text{ voor een constante } a \in \mathbb{R}.$$

Bereken de waarde van a . Is die positief of negatief? Wat betekent dit? Schets de oplossingen die de Ansatz voorspelt in het $(x, \dot{x})$ -vlak.

Hint: een analyse van seculiere/resonante termen is in deze opgave niet noodzakelijk.