

Vraag 1: 25 pt. Vraag 2: 20 pt. Vraag 3: 25 pt. Vraag 4: 25 pt. Eindcijfer = (Score+5)/10.
Het cijfer voor dit tentamen telt voor 50% mee in het eindcijfer voor dit vak.

Opgave 1 Laat $\mu \in \mathbb{R}$ een parameter zijn. We bekijken de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + \mu y \\ \frac{dy}{dt} &= x - y^2\end{aligned}$$

- a) Schets, voor $\mu < 0$, $\mu = 0$ en $\mu > 0$, de isoclijnen van deze differentiaalvergelijkingen. Bereken en teken ook de snijpunten van deze isoclijnen en gebruik deze informatie om de richtingsvelden te schetsen.
- b) Hoe heet de bifurcatie van evenwichtspunten die plaatsvindt bij $\mu = 0$?

Opgave 2 Bekijk de differentiaalvergelijking gegeven in poolcoördinaten door

$$\frac{dr}{dt} = 4 - r + \cos 4\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = (r-1)(r-6) + \sin \theta$$

Bewijs dat deze vergelijking een periodieke oplossing heeft die ligt binnen de ring $2 < r < 6$.

Opgave 3 Bekijk de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \text{ met } V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2.$$

- a) Laat zien dat deze differentiaalvergelijking reversibel is. Dat wil zeggen: als $x(t)$ een oplossing is, dan is ook $X(t) := x(-t)$ een oplossing.
- b) Laat zien dat deze differentiaalvergelijking conservatief is. Dat wil zeggen: dat er een niet-triviale functie $E = E(x, \dot{x})$ bestaat met $\frac{dE}{dt} = 0$. Geef een uitdrukking voor de functie E .
- c) Teken het faseplaatje van de differentiaalvergelijking. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 4 We bekijken de functieruimte

$$E := \{y : [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \mid y \text{ is continu}\}$$

voorzien van de supremum-norm

$$\|y\|_{\sup} := \sup_{-1 \leq t \leq 1} |y(t)|.$$

Op E definiëren we de integraaloperator K door

$$(Ky)(t) := \frac{1}{3} \left(1 + \int_0^t (y(s))^2 ds \right).$$

- a) Laat zien dat K de ruimte E naar zichzelf stuurt en dat K een contractie is.
- b) Bewijs dat E een Banachruimte is.
Hint: zoals bekend is de ruimte $\{y : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ is begrensd en continu}\}$ een Banachruimte.
- c) Bewijs dat er een unieke continue functie $y : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ bestaat waarvoor $Ky = y$. Gebruik dit om vervolgens te laten zien dat er een unieke continu differentieerbare functie $y : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ bestaat met de eigenschappen dat

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{3}(y(t))^2 \text{ voor alle } -1 < t < 1 \text{ en } y(0) = \frac{1}{3}.$$

SUCCES!