

Dit tentamen telt voor 30% mee in het eindcijfer.

Het gewicht voor de individuele vragen van dit tentamen is: opgave 1: 30%, opgave 2: 50%, opgave 3: 20%.
Eindcijfer = score/10.

Dit tentamen duurt 2 uur.

Opgave 1 Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = \mu - \sin^2(x/2)$$

Hierbij is μ een parameter en beschouwen we x als element van de cirkel $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

- Teken het faseplaatje voor $\mu < 0$, $\mu = 0$, $0 < \mu < 1$, $\mu = 1$ en $\mu > 1$. Geef hierin ook de stabiliteit van de evenwichtspunten aan.
- Teken het bifurcatie-diagram, d.w.z. een plaatje van het (μ, x) -vlak, waarin de evenwichtspunten en hun stabiliteit zijn aangegeven.
- Hoe heten de bifurcaties bij $\mu = 0$ en $\mu = 1$?

Opgave 2 We bekijken het ε -afhankelijke stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon - 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Bereken het spoor en de determinant van bovenstaande 2×2 -matrix. Gebruik deze informatie om de stabiliteit van het evenwichtspunt $(x, y) = (0, 0)$ te bepalen.
- Bereken de eigenwaarde(n) van bovenstaande matrix en klassificeer het evenwicht. D.w.z. bepaal voor alle reële waarden van ε of het evenwichtspunt een stabiele knoop, onstabiele knoop, gedegenereerde knoop, zadelpunt, centrumpunt, stabiele spiraal of onstabiele spiraal is.
- Stel dat $\varepsilon = 1$. Bereken nu de eigenwaarden en eigenvectoren van bovenstaande matrix en geef een uitdrukking voor de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen.
- Teken, wederom voor $\varepsilon = 1$, het faseplaatje voor het stelsel differentiaalvergelijkingen. D.w.z. teken in het (x, y) -vlak zoveel mogelijk banen van kwalitatief verschillende oplossingen. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 3 Beschouw de 1-dimensionale differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = h + rx^2 + x^4.$$

Hierin zijn h en r parameters.

Laat zien dat deze differentiaalvergelijking 0, 1, 2, 3 of 4 evenwichtsooplossingen kan hebben. Bereken de deelverzamelingen van het (h, r) -vlak waarin dit het geval is. Maak ook een tekening van deze deelverzamelingen.