

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen
	Duur: $2\frac{3}{4}$ uur
Vrije Universiteit	28-08-2009

Normering:

1a : 5			4a : 5		
1b : 5	2 : 15	3 : 15	4b : 10	5 : 15	6 : 15
1c : 5					

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

1. Beschouw de vergelijking (gegeven in poolcoordinaten r en θ)

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\log(r)}\end{aligned}$$

- Vind analytische uitdrukkingen voor $r(t)$ en $\theta(t)$, gegeven een beginvoorwaarde (r_0, θ_0) met $r_0 < 1$.
- Laat zien dat $r(t) \rightarrow 0$ and $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$. Concludeer dat de oorsprong een stabiel spiraalpunt is.
- Laat zien dat de oorsprong een stabiel punt is van het gelineariseerde systeem.
Hint: schrijf het systeem in cartesische coördinaten $x = r \cos(\theta)$ en $y = r \sin(\theta)$ en lineariseer rond de oorsprong.

2. Beschouw de vergelijking op de cirkel

$$\dot{\phi} = \omega - \sin(\phi), \quad \omega > 1.$$

Bereken de formule voor de periode T .

3. Laat zien dat in het stelsel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x - y^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2\end{aligned}$$

de oorsprong asymptotisch stabiel is en geef een zo groot mogelijk attractiegebied aan.

4. Beschouw de vergelijking

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= x \\ \dot{x} &= \alpha - \sin(\phi) - \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- a) Bepaal de evenwichtspunten (afhankelijk van de parameters).
 - b) Bewijs het bestaan van een periodieke oplossing voor $\alpha > 1$.
5. Formuleer en bewijs het criterium van Dulac.
6. Formuleer de Liénard's stelling en laat zien dat de van der Pol oscillator

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0,$$

een unieke, stabiele *limit cycle* heeft.