

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen
Vrije Universiteit	Duur: $2\frac{3}{4}$ uur 04-06-2007

1. Geef een voorbeeld van een gewone differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

waarvan de oplossing bestaat, maar niet uniek is en geef de oplossingen expliciet.

2. Beschouw de vergelijking

$$\dot{x} = x(1 - x) - h, \quad x(0) = x_0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Wat is het bifurcatie diagram?

3. Beschouw de vergelijking op de cirkel

$$\dot{\phi} = \omega - \sin(\phi).$$

Geef een formule voor de periode T die (bij benadering) geldig is voor $\omega \in (1, 1 + \epsilon)$, met ϵ klein.

4. Geef de klassifikatie van lineaire tijdsonafhankelijke vektorvelden in $\mathbb{R}^2$, d.w.z. vergelijkingen van de vorm

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

in termen van spoor en determinant van A (het τ, Δ -plaatje). Geef aan voor welke waarden de lineaire stabiliteit overgedragen kan worden naar het niet-lineaire geval.

5. Laat zien dat

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(2 - x - y) \end{aligned}$$

geen periodieke oplossing heeft, waarbij $x, y \geq 0$.

6. Formuleer de Poincaré-Bendixson stelling.

7. Beschouw de vergelijking (in pool-coordinaten)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{2}(kr + F \sin(\phi)) \\ \dot{\phi} &= -\frac{1}{8}(4a - 3br^2 + \frac{4F}{r} \cos(\phi)), \end{aligned}$$

waarin $a, b, F, k \in \mathbb{R}$ en strikt positief (> 0).

a) Bepaal de evenwichtspunten (afhankelijk van de parameters).

b) Kan er een periodieke oplossing zijn? (Hint: Dulac).

Normering:

1 : 10

2 : 12

3 : 12

4 : 12

5 : 12

6 : 12

7 : 20

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$