

- **Maak alle opgaven.**
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Het gebruik van boeken, dictaten, aantekeningen en rekenmachines is *niet* toegestaan.
- Als je een onderdeel niet kunt doen dan mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

(1) Vind alle $x \in \mathbb{Z}$ die voldoen aan de twee voorwaarden

$$8x \equiv 1 \pmod{61}, \quad 2x \equiv 8 \pmod{10}.$$

(2) Laat $a \in \{-2, 2\}$ en laat p en $q := 4p + 1$ priemgetallen zijn.

(a) Laat zien dat

$$\left(\frac{a}{q}\right) = -1.$$

(b) Bewijs dat a een primitieve wortel modulo q is.

(3) (a) Laat p een oneven priemgetal zijn. Laat zien dat -3 een kwadraatrest modulo p is dan en slechts dan als $p \equiv 1 \pmod{3}$.

(b) Laat $x \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $(2x)^2 + 3$ deelbaar is door een priemgetal $p \equiv 1 \pmod{6}$.

(c) Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen p van de vorm $p \equiv 1 \pmod{6}$ zijn.

(4) Laat $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ en beschouw de Diophantische vergelijking

$$x^p y^q = z^r - 1, \quad x, y, z \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

(a) Laat zien dat voor een oplossing van vergelijking $(*)$ geldt dat

$$\text{rad}(x^p y^q z^r) < z^{2r/3}.$$

(b) Bewijs dat uit het *abc*-vermoeden volgt dat vergelijking $(*)$ ten hoogste eindig veel oplossingen heeft.

(5) (a) Los de volgende Diophantische vergelijking op:

$$y^2 = 4x^3 + 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

(Hint: herschrijf de vergelijking en factoriseer.)

(b) Laat zien dat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ de enige oplossing is van de Diophantische vergelijking

$$x^3 + 2y^3 = 7z^3, \quad x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

(Hint: reken modulo een klein priemgetal.)

(c) Parametriseer alle rationale punten op de hyperbool gegeven door

$$3x^2 - 2y^2 = 1.$$

Normering				
1: 10	2a: 6	3a: 8	4a: 6	5a: 10
	2b: 10	3b: 6	4b: 10	5b: 8
		3c: 8		5c: 8
Maximum totaal = 90				
Cijfer = 1 + Totaal/10				