

Tentamen Functionaalanalyse, 7 juni 1999, 13:30-16:30

1. Beschouw de reële Banach ruimte $C_b(\mathbb{R})$ van continue begrensde functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ voorzien van de sup-norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

en beschouw de volgende twee lineaire deelruimten van $C_b(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{R}) &= \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}, \\ C_c(\mathbb{R}) &= \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid \text{er bestaat } R > 0 \text{ zodat } f(x) = 0 \text{ als } |x| > R\}. \end{aligned}$$

(Merk op dat in de definitie van $C_c(\mathbb{R})$ het getal $R > 0$ van f afhangt.)

- (a) Bewijs dat $C_0(\mathbb{R})$ gesloten is in $C_b(\mathbb{R})$.
 - (b) Bewijs dat $C_c(\mathbb{R})$ niet gesloten is in $C_b(\mathbb{R})$.
2. Beschouw de lineaire operator $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ gegeven door

$$Kf(x) = \int_0^1 (x+t)f(t) dt.$$

- (a) Bewijs dat K begrensd is.
- (b) Bewijs dat K zelf-geadjungeerd is.
- (c) Bewijs dat K een operator is van eindige rang met rang $K = 2$.
- (d) Bepaal $\text{Im } K$ en $\text{Ker } K$.
- (e) Bepaal $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2([0, 1])$ zodat

$$Kf = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle \varphi_2, \quad f \in L^2([0, 1]).$$

3. Een stelsel vectoren $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ in een Hilbert ruimte H heet een *Riesz stelsel* als er constanten $A, B > 0$ bestaan zodanig dat voor alle eindige rijtjes complexe getallen $\{a_k\}_{k=1}^N$ geldt

$$A \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^N a_k x_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^N |a_k|^2.$$

- (a) Bewijs dat een orthonormaal stelsel in H een Riesz stelsel is met bijbehorende constanten $A = 1$ en $B = 1$.
- (b) Indien $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ een Riesz stelsel is met bijbehorende constanten $A = 1$ en $B = 1$, volgt dan dat $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ een orthonormaal stelsel is? Motiveer je antwoord.

VERVOLG

4. De Banach ruimte ℓ^p , $1 < p < \infty$, wordt gegeven door

$$\ell^p = \left\{ (x_k)_{k=1}^\infty \mid \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty \right\}.$$

- (a) Zij $(t_k)_{k=1}^\infty \in \ell^q$ met q zodat $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Bewijs, met gebruik van de ongelijkheid van Hölder, dat de afbeelding

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \sum_{k=1}^\infty x_k t_k$$

een begrensde lineaire functionaal op ℓ^p is.

- (b) Bewijs dat als $f \in (\ell^p)^*$ een begrensde lineaire functionaal op ℓ^p is, dat er dan $(t_k)_{k=1}^\infty \in \ell^q$ (met q zodat $p^{-1} + q^{-1} = 1$) bestaat, zodat

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^\infty x_k t_k, \quad (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^p.$$

5. Gegeven is de Hilbert ruimte

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} |x_k|^2 < \infty\}$$

met het inwendige product

$$\langle x, y \rangle_H = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} x_k \overline{y_k}.$$

De lineaire afbeelding $A : \ell_2 \rightarrow H$ wordt gegeven door $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

- (a) Bewijs dat A een compacte lineaire operator is en bewijs dat de operatornorm van A voldoet aan $\|A\| = 1$.
 (b) Bepaal de geadjungeerde operator A^* .
 (c) Bewijs dat de operator $B : \mathcal{D}(B) \rightarrow \ell_2$, die op het domein

$$\mathcal{D}(B) = \{(y_1, y_2, y_3, \dots) \in H \mid \sum_{k=1}^\infty |y_k|^2 < \infty\}$$

wordt gegeven door $B(y_1, y_2, y_3, \dots) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$, een gesloten operator is.

puntentelling:

1(a): 3	2(a): 3	3(a): 3	4(a): 3	5(a): 3
1(b): 3	2(b): 2	3(b): 5	4(b): 4	5(b): 3
	2(c): 3			5(c): 4
	2(d): 2			
	2(e): 4			
—	—	—	—	—
6	14	8	7	10

$$\text{tentamencijfer} = \frac{\text{punten} + 5}{5}$$