



1. Beschouw de reële Banach ruimte $C_b(\mathbb{R})$ van continue begrensde functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ voorzien van de sup-norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

en beschouw de volgende twee lineaire deelruimten van $C_b(\mathbb{R})$:

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\},$$

$$C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid \text{er bestaat } R > 0 \text{ zodat } f(x) = 0 \text{ als } |x| > R\}.$$

(Merk op dat in de definitie van $C_c(\mathbb{R})$ het getal $R > 0$ van f afhangt.)

- (a) Bewijs dat $C_0(\mathbb{R})$ gesloten is in $C_b(\mathbb{R})$.
 - (b) Bewijs dat $C_c(\mathbb{R})$ niet gesloten is in $C_b(\mathbb{R})$.
2. De Banach ruimte ℓ^p , $1 < p < \infty$, wordt gegeven door

$$\ell^p = \left\{ (x_k)_{k=1}^\infty \mid \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty \right\}.$$

- (a) Zij $(t_k)_{k=1}^\infty \in \ell^q$ met q zodat $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Bewijs, met gebruik van de ongelijkheid van Hölder, dat de afbeelding

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \sum_{k=1}^\infty x_k t_k$$

een begrensde lineaire functionaal op ℓ^p is.

- (b) Bewijs dat als $f \in (\ell^p)^*$ een begrensde lineaire functionaal op ℓ^p is, dat er dan $(t_k)_{k=1}^\infty \in \ell^q$ (met q zodat $p^{-1} + q^{-1} = 1$) bestaat, zodat

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^\infty x_k t_k, \quad (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^p.$$

VERVOLG

3. Gegeven is de begrensde lineaire afbeelding $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$,

$$Tf(x) = a(x)f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Hier is $C([0, 1])$ de complexe Banachruimte van continue functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{C}$, voorzien van de sup-norm.

We nemen eerst $a(x) = x$ voor $x \in [0, 1]$.

- (a) Bewijs dat $\text{Ker } T = (0)$.
- (b) Bewijs dat $\text{Im } T \subseteq C([0, 1])$ niet dicht.
- (c) Bewijs dat $\sigma(T) = [0, 1]$.

We nemen nu $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ een willekeurige continue strict stijgende functie.

- (d) Stel $a(0) = \alpha$ en $a(1) = \beta$. bewijs dat $\sigma(T) = [\alpha, \beta]$.

4. Zij X, Y Banach ruimten en $A : X \rightarrow Y$ een begrensde operator met $\text{Im } A = Y$.

- (a) Bewijs dat als $R : Y \rightarrow X$ een begrensde operator is die voldoet aan $ARy = y$ voor $y \in Y$, dan is $I - RA : X \rightarrow X$ een projectie op $\text{Ker } A$.
- (b) Bewijs dat A een begrensde rechter inverse heeft als en alleen als $\text{Ker } A$ een gesloten en gecomplementeerde deelruimte in X is.

5. Beschouw de lineaire operator $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ gegeven door

$$Kf(x) = \int_0^1 (x+t)f(t) dt.$$

- (a) Bewijs dat K begrensd is.
- (b) Bewijs dat K zelf-geadjungeerd is.
- (c) Bewijs dat K een operator is van eindige rang met rang $K = 2$.
- (d) Bepaal $\text{Im } K$ en $\text{Ker } K$.
- (e) Bepaal $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2([0, 1])$ zodat

$$Kf = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle \varphi_2, \quad f \in L^2([0, 1]).$$

puntentelling:

1(a): 3	2(a): 3	3(a): 2	4(a): 3	5(a): 3
1(b): 3	2(b): 4	3(b): 3	4(b): 3	5(b): 2
		3(c): 4		5(c): 3
		3(d): 3		5(d): 2
				5(e): 4
—	—	—	—	—
6	7	12	6	14

$$\text{tentamencijfer} = \frac{\text{punten} + 5}{5}$$