
Verkorte uitwerking tentamen

Opgave 1

- (a) Zie blz 91 boek.
- (b) Zie blz 93 boek.
- (c) Taal is regulier dus er bestaat een dfa voor, waarvan de begin toestand geen eindtoestand is. (Anders zat λ in de taal.) Gebruik algoritme op blz 95-96 om deze dfa om te zetten in een rechts lineaire grammatica met als enige aanpassing: i.p.v. $q_k \rightarrow \lambda$ toe te voegen voor elke eindtoestand q_k , voeg $q_j \rightarrow a$ toe voor elke productie $\delta(q_j, a) = q_k$. Dus als automaat van q_j een a stap set naar een eindtoestand q_k dan worden zowel $q_j \rightarrow aq_k$ als $q_j \rightarrow a$ toegevoegd.
- Het is duidelijk dat de aanpassing de taal niet veranderd en dat de grammatica van de juiste vorm is.

Opgave 2

- (a) Zie blz 103 boek.
- (b) Let op !!, gebruik bij onderdeel 1 niet stelling 4.1 "de verkeerde kant op".
- i) Onwaar: neem de volgende talen over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma^* && \text{(dus alle woorden)} \\ L_2 &= \{a^n b^n \mid n \geq 0\}. \end{aligned}$$

- Dan is L_1 duidelijk regulier (bv m.b.v. reguliere expressie: $L_1 = L((a+b)^*)$). De taal L_2 is het standaard voorbeeld van een niet reguliere taal. De vereniging van de twee talen is regulier (want gelijk aan L_1), en L_1 is regulier maar L_2 niet.
- ii) Waar: $L_2 = ((L_1 \cup L_2) - L_1) \cup (L_1 \cap L_2)$. L_1 is eindig en dus regulier, $L_1 \cap L_2$ is eindig, dus regulier, $L_1 \cup L_2$ is regulier (gegeven), aangezien de klasse van reguliere talen gesloten is onder $-$ en $\cup$ is dan ook L_2 regulier.
- (c) Aangezien $L_1 = \bar{L}_2$ precies wanneer $(L_1 \cap L_2) \cup (\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2) = \emptyset$. Gegeven dfas voor L_1 en L_2 kan een dfa voor $(L_1 \cap L_2) \cup (\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2)$ geconstrueerd worden. Kijk in deze dfa of er een pad van de begin toestand naar een eindtoestand is. Als er geen pad is, dan $L_1 = \bar{L}_2$ anders niet.

Opgave 3

- (a) Zie blz 212 boek.
- (b) L_1 is context vrij: bv grammatica met volgende producties:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AD \\ D &\rightarrow bDc \mid C \\ A &\rightarrow aA \mid \lambda \\ C &\rightarrow cC \mid \lambda. \end{aligned}$$

(Eerst willekeurig aantal a 's (A), dan evenveel b 's als c 's (D) met mogelijk extra aantal c 's (C)).

L_2 is context vrije: bv neem ndpa en tel op de stack (door +,- op stack te zetten) $\#a's - \#b's - \#c's$ en accepteer het woord als dit ≤ 0 oplevert. Of grammatica met volgende producties

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \mid bA \mid cA \mid \lambda \\ A &\rightarrow aS \mid bAA \mid cAA \mid \lambda \\ B &\rightarrow aBB \mid bS \mid cS. \end{aligned}$$

Geen onderscheid (bij tellen) nodig tussen b 's en c 's. A zijn woorden met waar in 1 a meer (dan b 's en c 's) MAG zitten. B zijn woorden met waar een extra b of c in MOET zitten. Voor S : Als het woord start met a , dan moet er in de rest een b of c zitten om dit te compenseren, vandaar aB . Als het woord begint met een b of c dan mag in de rest van het woord een extra a zitten (bA en cA). Voor B : Als er al een a te veel is, en er wordt nog een a gelezen, dan moeten er daarna 2 extra b/c 's volgen (aBB), etc.

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^m c^k \mid n \leq m + k \wedge m \leq k\}$ is niet contextvrij. Bewijs met het pompllemma: Voor gegeven m kies het woord $w = a^{2m} b^m c^m$ dat duidelijk in de taal zit. Voor een gegeven opsplitsing $uvxyz$ die aan de voorwaarden voldoet geldt (omdat $|vxy| \leq m$):

- vy bestaat alleen uit a 's: kies $i = 2$ want w_2 bevat te veel a 's (meer a 's dan b 's en c 's samen).
- vy bestaat uit a 's en b 's: kies $i = 2$ want w_2 bevat te veel b 's (meer b 's dan c 's).
- vy bevat geen a 's: kies $i = 0$, want w_0 bevat te veel a 's (meer a 's dan b 's en c 's samen).

Opgave 4

- Zie blz 286 boek.
- Zie blz 292 boek.
- Het aantal Turing berekenbare functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is aftelbaar (want aantal TM aftelbaar). Echter het aantal functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is overaftelbaar. Diagonaal argument: Een functie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kan worden gezien als een lijst met getallen; eerste element van de lijst is $f(1)$, i -de element van de lijst is $f(i)$. Stel er is een aftelling van deze functies, dus een lijst $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zodat alle functies er in zitten. Kijk nu naar de functie: $g(i) = f_i(i) + 1$. Deze functie kan niet in de lijst staan, want als de functie op plek j zou staan, dan moet $g(j) = f_j(j)$ maar ook $g(j) = f_j(j) + 1$. Dit geeft een tegenspraak, dus er bestaat geen aftelling van de functies.

Het tentamencijfer is gelijk aan het tiende deel van het aantal behaalde punten.