

tentamen formele structuren  
6 juni 2006

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.  
De axioma's van de procesalgebra zijn gegeven op de laatste bladzijde.

**Opgave 1.**

- (1) Gegeven zijn de functies  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  door:

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = 0$$

$$h(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

Geef voor elke functie aan of zij injectief en/of surjectief is.  
Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

(NB.  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .)

(5 punten)

- (2) Laat zien dat de volgende verzamelingen gelijkmachtig zijn:  
 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$  en  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ .

(5 punten)

- (3) Geef van de volgende verzamelingen aan of ze aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig zijn (het antwoord alleen volstaat):

- (i) de verzameling  $\mathbb{Q}$  van rationale getallen;
- (ii) de verzameling van eindige rijtjes over  $\{0, 1\}$ ;
- (iii) de verzameling  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  van functies van  $\mathbb{N}$  naar  $\{0, 1\}$ ;
- (iv) de verzameling  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  van deelverzamelingen van natuurlijke getallen;
- (v) de verzameling van rationale getallen tussen 0 en 1.

(5 punten)

**Opgave 2.** Gegeven is het deductief systeem over het alfabet  $\{a, b\}$  met één axioma:

$$aa$$

en drie afleidingsregels:

$$\frac{xa}{xx} (R_1) \qquad \frac{x}{xy} \frac{y}{xy} (R_2) \qquad \frac{xaay}{xby} (R_3)$$

- (1) Geef een afleiding van de string  $bb$ .

(5 punten)

- (2) Is de string  $aaa$  afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.  
(5 punten)
- (3) Laat zien dat voor elke  $n > 0$  de string  $b^n$  afleidbaar is.  
(5 punten)

### Opgave 3.

- (1) Geef een reguliere expressie voor de taal bestaande uit alle strings over  $\{0, 1\}$  met een oneven aantal symbolen.  
(5 punten)
- (2) Bewijs dat de taal  $\{0^k 1^l \mid k < l\}$  niet regulier is.  
(5 punten)
- (3) Geef een DEA voor de taal bestaande uit alle strings over  $\{0, 1\}$  waarin 001 niet als substring voorkomt.  
(5 punten)

### Opgave 4.

- (1) Geef de transitiegraaf van een Turing Machine die een op de tape staande eindige string over  $\{0, 1\}$  precies één plaats naar rechts opschuift.  
(6 punten)
- (2) Gegeven is de Turing Machine met de volgende transitietabel:

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | — | — | $L$ | $q_1$ |
| $q_1$ | 0 | — | $L$ | $q_2$ |
| $q_1$ | 1 | — | $L$ | $q_2$ |
| $q_2$ | 0 | — | $L$ | $q_3$ |
| $q_2$ | 1 | — | $L$ | $q_3$ |

De Turing Machine begint in toestand  $q_0$  met de kop bij het eerste symbool van de eindige string over  $\{0, 1\}$ .

- (i) Wat is het resultaat als de string op de tape 1 is?  
(ii) Wat is het resultaat als de string op de tape 010 is?  
(iii) Wat doet de machine in het algemeen?

(9 punten)

**Opgave 5.** Deze opgave gaat over PA (dus zonder communicatie). We gebruiken atomaire acties  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , en  $d$ . Zijn de volgende vergelijkingen geldig? Zo ja, geef een afleiding in PA. Zo nee, toon aan dat de bijbehorende grafen niet bisimilaar zijn.

(1)  $(ab) \parallel c = a \parallel (cb)$ .

(5 punten)

(2)  $(a + b) \parallel cd = (a \parallel cd) + (b \parallel cd)$ .

(5 punten)

**Opgave 6.** Teken de procesgraaf van  $Y$  gedefinieerd door de recursievergelijkingen met atomaire acties  $a$  en  $b$ :

$$\begin{aligned} Y &= aY + bZ \\ Z &= aZ + bYZ \end{aligned}$$

(5 punten)

**Opgave 7.** Deze opgave gaat over ACP (met communicatie). We gebruiken atomaire acties  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ , en  $a^*$ . De communicatiefunctie is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = a^*$ . Verder is gegeven  $H = \{a, a'\}$ .

(1) Teken de procesgraaf  $G(ab \parallel (a + a'))$ .

(5 punten)

(2) Teken het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta_H(G(ab \parallel (a + a')))$ .

(5 punten)

(3) Bereken  $\partial_H(ab \parallel (a + a'))$ .

(5 punten)

*Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.*

### De axioma's van de procesalgebra

- (A1)  $x + y = y + x$
- (A2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3)  $x + x = x$
- (A4)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  
- (A6)  $x + \delta = x$
- (A7)  $\delta \cdot x = \delta$
  
- (CF1)  $a \mid b = \gamma(a, b)$  als  $\gamma(a, b)$  gedefinieerd
- (CF2)  $a \mid b = \delta$  als  $\gamma(a, b)$  niet gedefinieerd
  
- (CM1)  $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2)  $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3)  $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4)  $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5)  $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6)  $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7)  $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8)  $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9)  $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$
  
- (D1)  $\partial_H(a) = a$  als  $a \notin H$
- (D2)  $\partial_H(a) = \delta$  als  $a \in H$
- (D3)  $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4)  $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$