

tentamen formele structuren
31 maart 2006

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Opgave 1.

- (1) Geef van elk van de volgende functies in $[0, 1] \rightarrow [3, 5]$ aan of zij injectief, surjectief en/of bijectief is. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

(i) $x \mapsto 4$

(ii) $x \mapsto 4 - x$

(iii) $x \mapsto 2x + 3$

(6 punten)

- (2) Laat zien dat de intervallen $A = (0, 1]$ en $B = [1, 3)$ gelijkmachtig zijn.

(4 punten)

- (3) Geef van de volgende verzamelingen aan of ze aftelbaar of overaftelbaar oneindig zijn (het antwoord alleen volstaat):

(i) de verzameling van oneindige rijtjes over $\{0, 1\}$;

(ii) de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ van paren van natuurlijke getallen;

(iii) de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ van irrationale getallen.

(5 punten)

Opgave 2. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

a

en twee afleidingsregels:

$$\frac{ax}{xb} (R_1) \qquad \frac{xb}{axb} (R_2)$$

- (1) Geef een afleiding van de string $bbbb$.

(5 punten)

- (2) Is de string baa afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.

(5 punten)

- (3) Laat zien dat elke string van de vorm $a^k b^l$ met $k + l \geq 1$ afleidbaar is.

(5 punten)

Opgave 3.

- (1) Geef een DEA die de taal herkent bestaande uit alle niet-lege strings over $\{0, 1\}$ waarvan het eerste en het laatste symbool verschillen.
(5 punten)
- (2) Geef een reguliere expressie voor de taal die bestaat uit alle strings over $\{0, 1\}$ met een even aantal symbolen.
(5 punten)
- (3) Beredeneer dat de taal over $\{a, b, c\}$ van strings die meer c 's bevatten dan a 's en b 's samen, niet regulier is.
(5 punten)

Opgave 4.

- (1) Geef de transitietabel van een Turing Machine die het laatste symbool van een string over $\{0, 1\}$ weghaalt en vooraan de string neerzet. Ga ervan uit dat de kop bij de start aan het begin van de (niet-lege) string staat.
(6 punten)
- (2) Gegeven is de Turing Machine met de volgende transitietabel:

start	0	—	R	q_0
start	1	—	R	q_1
q_0	0	0	R	q_0
q_0	1	0	R	q_1
q_0	—	0	R	stop
q_1	0	1	R	q_0
q_1	1	1	R	q_1
q_1	—	1	R	stop

De Turing Machine begint in toestand start met de kop bij het eerste symbool van de string.

- (i) Wat doet de Turing Machine op input 101?
 - (ii) Wat doet de Turing Machine op input een niet-lege string over $\{0, 1\}$?
- (9 punten)

Opgave 5. Deze opgave gaat over PA (dus zonder communicatie). We gebruiken atomaire acties a , b en c . Zijn de volgende vergelijkingen geldig? Zo ja, geef een afleiding in PA. Zo nee, toon aan dat de bijbehorende grafen niet bisimilaar zijn.

(1) $a \parallel b + a \parallel c = a \parallel (b + c)$.

(5 punten)

(2) $(a + b) \parallel (a + c) = (a + b)(a + c) + (a + c)(a + b)$.

(5 punten)

Opgave 6. Bepaal een oplossing als procesgraaf van X in de volgende recursieve specificatie (a , b , c , en d zijn atomaire acties):

$$X = a(bX + cXX) + d$$

(5 punten)

Opgave 7. Deze opgave gaat over ACP (met communicatie). We gebruiken atomaire acties a , a' , a^* , en b . De communicatiefunctie is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = a^*$. Verder is gegeven $H = \{a, a'\}$.

(1) Teken de procesgraaf $G(ab \parallel a')$.

(5 punten)

(2) Teken het δ -schone overblijfsel $\Delta_H(G(ab \parallel a'))$.

(5 punten)

(3) Bereken $\partial_H(ab \parallel a')$.

(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$