

tentamen formele structuren
1 april 2005

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Opgave 1.

- (a) Gegeven zijn de volgende functies van $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$f(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2$$

$$g(x) = (x - 1)^2$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{als } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijjectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB: $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

(6 punten)

- (b) Welke van de volgende beweringen zijn *waar* voor alle aftelbare verzamelingen A , B , en alle overaftelbare verzamelingen C , D ? Geef voor de beweringen die niet waar zijn een tegenvoorbeeld.

(i) $A \cup B$ is aftelbaar.

(ii) $A \cup C$ is aftelbaar.

(iii) $C \setminus A$ is overaftelbaar.

(iv) $C \setminus D$ is overaftelbaar.

(6 punten)

Opgave 2.

Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

ab

en één afleidingsregel:

$$(R) \quad \frac{xb \quad y}{bxy}$$

- (a) Geef een afleiding van de string $babaab$.

(5 punten)

- (b) Is de string *babbaaba* afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.
(6 punten)
- (c) Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.
(4 punten)

Opgave 3. Deze opgave gaat over DEAs en reguliere expressies over $\{0, 1\}$.

- (a) Geef een DEA die de taal $\{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ herkent.
(5 punten)
- (b) Geef een reguliere expressie voor de taal bestaande uit alle strings die beginnen met 01 en eindigen op 10.
(5 punten)
- (c) Beredeneer dat de taal bestaande uit alle strings waarin het aantal 0-en twee groter is dan het aantal 1-en niet regulier is.
(5 punten)

Opgave 4. Deze opgave gaat over Turing Machines.

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine met twee toestanden die eerst één 1 print, dan nog een 1 rechts daarvan, dan nog een 1 links van de twee 1-en, dan weer een 1 rechts van de drie 1-en, dan weer een 1 links van de vier 1-en, enzovoorts. Ook deze Turing Machine termineert niet.
(6 punten)
- (b) Gegeven is een Turing Machine T met de volgende transitietabel:

q_0	0	0	R	q_0
q_0	1	1	R	q_1
q_1	0	0	R	q_1
q_1	1	1	R	q_0
q_0	—	—	L	accept
q_1	—	—	L	reject

Bij het begin van de berekening leest T het eerste symbool van een eindige string over $\{0, 1\}$.

- (i) Geef een string dit geaccepteerd wordt door T en een string die niet geaccepteerd wordt door T .
(4 punten)
- (ii) Welke strings worden in het algemeen door T geaccepteerd?
(4 punten)

Opgave 5. We werken in deze opgave in PA (dus zonder communicatie) met de atomaire acties a en b . Zijn de volgende vergelijkingen geldig? Zo ja, geef een berekening; zo nee, toon aan dat de bijbehorende procesgrafen niet bisimilaar zijn.

(a) $a \parallel bc = (a \parallel b)c$?

(6 punten)

(b) $ba \parallel a = (b \parallel a)a + baa$?

(6 punten)

Opgave 6. We werken met de verzameling acties $A = \{a, a', e, b, c\}$. De communicatiefunctie γ is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = e$.

(a) Teken de procesgraaf van $aba \parallel a'c$, dwz. het cartesisch product van $G(aba)$ en $G(a'c)$ met toevoeging van de communicatiepijlen.

(6 punten)

(b) We hebben nu bovendien gegeven $H = \{a, a'\}$. Teken $\Delta_H(G(aba \parallel a'c))$.

(6 punten)

Opgave 7.

(a) Teken de procesgraaf van X , gedefinieerd in de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= aaY \\ Y &= bY + aX + c \end{aligned}$$

(5 punten)

(b) Gegeven zijn de processen X, Y , gedefinieerd met de recursievergelijkingen

$$\begin{aligned} X &= baX \\ Y &= a'cY \end{aligned}$$

Geef een oneindig trace van het proces $\partial_H(X \parallel Y)$.

(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$