

Opgave 1.

- (a) De functie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is injectief, surjectief en dus ook bijectief.
De functie $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is niet injectief, want $g(0) = g(1) = \frac{1}{4}$. De functie $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is ook niet surjectief, want er is geen $x \in [0, 1]$ met $g(x) = 1$. De functie $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is dus ook niet bijectief.
De functie $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is injectief. De functie $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is niet surjectief, want er is geen $x \in [0, 1]$ met $h(x) = 1$. De functie $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is dus ook niet bijectief.
- b. De functie $f : A \rightarrow B$ met $f(x) = 2x - 7$ is een bijectie. Om te beginnen is f injectief: als $f(a) = f(a')$ dan geldt $a = a'$. Verder is f surjectief: voor elke $b \in B$ is er een $a \in A$, namelijk $\frac{(b+7)}{2}$, met $f(a) = b$. Dus f is bijectief.
- c. P is aftelbaar, dus er is een aftelling van P , zeg $p_0, p_1, p_2, \dots$. Stel dat $Q \setminus P$ aftelbaar is. Dan is er een aftelling van $Q \setminus P$, zeg $r_0, r_1, r_2, \dots$. Dan kunnen we een aftelling van $(Q \setminus P) \cup P$ construeren: $p_0, r_0, p_1, r_1, p_2, r_2, \dots$. Er geldt $Q \subseteq (Q \setminus P) \cup P$, dus dan is Q ook aftelbaar. Tegenspraak! Conclusie: $Q \setminus P$ is niet aftelbaar.
NB: we weten niet of P en Q elementen gemeenschappelijk hebben of niet. Het zou zelfs kunnen zijn dat ze disjunct zijn, dan geldt $Q \setminus P = Q$.
- d. De verzameling reële getallen $\mathbb{R}$, de verzameling van oneindige rijtjes bestaande uit 0 en 1, de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Opgave 2.

- a. Een afleiding van $aaab$:
- 1) b (axioma)
 - 2) ab (uit 1 met $x := \lambda$ en 1 met $y := b$ met R1)
 - 3) $aaab$ (uit 2 met $x := a$ en 2 met $y := ab$ met R1)
- b. Neem als stringeigenschap I : de string is van de vorm $a^n b$ met een $n \in \mathbb{N}$. We laten zien dat I een invariant is:
- I geldt voor het axioma want b is van de vorm $a^n b$ met $n = 0$.
 - I blijft behouden onder toepassen van R1: Stel xb is van de vorm $a^n b$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dan is x van de vorm a^n . Stel ook y is van de vorm $a^m b$ voor zekere $m \in \mathbb{N}$. Dan is xy van de vorm $a^n a^m b$, dus ook van de vorm $a^p b$ met $p \in \mathbb{N}$.
 - I blijft behouden onder toepassen van R2: Stel ax is van de vorm $a^n b$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Er moet dan gelden $n \geq 1$. Dan is x van de vorm $a^{n-1} b$. Omdat $n \geq 1$ geldt er $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Als een string afleidbaar is, dan voldoet de string aan I . De string $aaabb$ voldoet niet aan I , en is dus niet afleidbaar.

Er zijn ook andere invarianten zoals “de string bevat precies één b ” mogelijk.

- c. In vraag b hebben we laten zien: als een string afleidbaar is, dan is hij van de vorm $a^n b$. We laten nu zien: als een string van de vorm $a^n b$ is met $n \in \mathbb{N}$, dan is hij afleidbaar. Samen geeft dit dat de verzameling afleidbare strings precies $\{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$ is. Het systeem is dus beslisbaar.

We laten nu met inductie zien dat alle strings van de vorm $a^n b$ afleidbaar zijn.

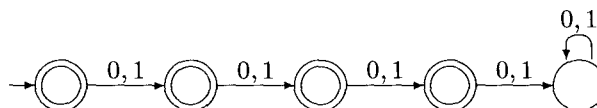
- $n = 0$. b is afleidbaar want dat is het axioma.
- $n > 0$. Stel dat de strings van de vorm $a^m b$ afleidbaar zijn voor alle $m < n$. We laten zien dat $a^n b$ afleidbaar is. We passen regel R1 toe:

$$\frac{a^{n-1}b \quad ab}{a^n b}$$

Dus a^n is afleidbaar.

Opgave 3.

a.



- b. $\lambda + (0 + 1) + (0 + 1)(0 + 1) + (0 + 1)(0 + 1)(0 + 1)$.

- c. Stel dat er wel een reguliere expressie is die L beschrijft. Dan is er ook een DEA M die L herkent. Die DEA moet ook alle strings van de vorm $1^n 0^{n+5}$ herkennen. We kijken eerst naar de strings van de vorm 1^n . Er zijn oneindig veel van zulke strings. Omdat M maar eindig veel toestanden heeft, zijn er twee verschillende strings 1^k and 1^l met $k \neq l$ die je in dezelfde toestand, zeg p , brengen. De string $1^k 0^{k+5}$ zit in de taal, en vanuit p de string 0^{k+5} lezen moet je dus in een accepterende toestand, zeg q brengen. Maar dat betekent dat het lezen van de string $1^l 0^{k+5}$ beginnend in de starttoestand je ook in een accepterende toestand brengt, terwijl die string niet in de taal L zit. Uit de aanname dat er een reguliere expressie is die L beschrijft volgt dus een tegenspraak. We concluderen dat die aanname niet waar is: er is dus *geen* reguliere expressie die L beschrijft.

Opgave 4.

a.

q ₀	—	—	R	accept
q ₀	0	0	R	q ₀
q ₀	1	1	R	q ₁
q ₁	—	—	R	reject
q ₁	0	0	R	reject
q ₁	1	1	R	q ₂
q ₂	—	—	R	accept
q ₂	0	0	R	reject
q ₂	1	1	R	q ₁

b.

q ₀	—	—	R	accept
q ₀	1	—	R	q ₁
q ₁	—	—	L	q ₂
q ₁	1	1	R	q ₁
q ₁	0	0	R	q ₁
q ₂	0	—	L	q ₃
q ₃	—	—	R	q ₀
q ₃	1	1	L	q ₃
q ₃	0	0	L	q ₃

Opgave 5.

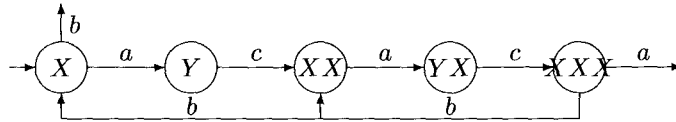
a.

$$\begin{aligned}
 (a + b) \parallel (cd + e) &= \\
 (a + b) \parallel (cd + e) + (cd + e) \parallel (a + b) &= \\
 a \parallel (cd + e) + b \parallel (cd + e) + (cd) \parallel (a + b) + e \parallel (a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d \parallel (a + b)) + e(a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d \parallel (a + b) + (a + b) \parallel d) + e(a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d(a + b) + a \parallel d + b \parallel d) + e(a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d(a + b) + ad + bd) + e(a + b) &=
 \end{aligned}$$

b. We laten zien dat de procesgraaf van ac niet bisimilaair is met die van $a(b + c)$.

Als we proberen een bisimulatie te construeren, dan moeten we om te beginnen de roots aan elkaar relateren. Vanuit de root kan je in alletwee de grafen alleen een a -stap doen. Je moet de punten waar je dan in terecht komt ook aan elkaar relateren. Maar dan kan je in de graaf van $a(b + c)$ een b -stap doen, terwijl dat in de graaf van ac niet mogelijk is. Conclusie: de twee grafen zijn niet bisimilaair, en de gelijkheid $ac = a(b + c)$ geldt dus ook niet.

c. De procesgraaf van X :



We gebruiken het volgende:

$$XX = (aY + b)X = aYX + bX$$

$$YX = cXXX$$

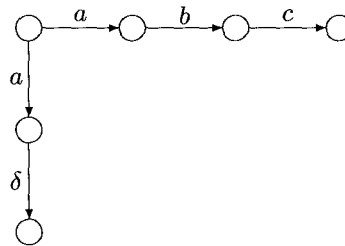
$$XXX = (aY + b)XX = aYXX + bXX$$

Opgave 6.

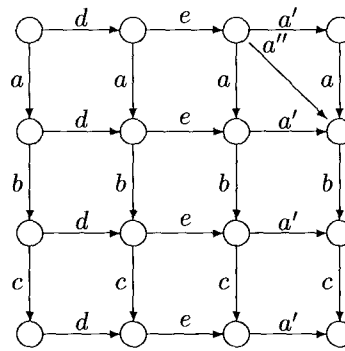
a.

$$\begin{aligned} a\delta b + a(b + \delta)c + \delta(a + b) &= \\ a\delta + abc + \delta &= \\ a\delta + abc & \end{aligned}$$

Het δ -schone overblijfsel van $G(p)$:



b. $G(abc \parallel dea')$:



c. $\Delta_H(G(abc \parallel dea'))$:

