

tentamen formele structuren
16 augustus 2002

Opgave 1.

- (a) Laat zien dat de verzameling $\mathbb{Z}$ van de gehele getallen aftelbaar is door het geven van een aftelling (d.w.z. een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$.)

(4 punten)

- (b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ en $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$.

(i) Geef een injectie f van A naar B .

(ii) Geef een injectie g van B naar A .

(iii) Geldt $\#A = \#B$? Motiveer uw antwoord.

(9 punten)

- (c) Noem drie verschillende overaftelbare verzamelingen.

(2 punten)

Opgave 2.

- (a) Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

0

en één afleidingsregel:

$$\frac{x \quad y}{x \ 1 \ y}$$

Laat zien dat voor elke $n \geq 0$ de string $0(10)^n$ afleidbaar is.

(5 punten)

- (b) Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

00

en drie afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x \ 0}{x \ x}$$

$$(R2) \quad \frac{x \quad y}{x \ y}$$

$$(R3) \quad \frac{x \ 0 \ 0 \ y}{x \ 1 \ y}$$



Geef een afleiding van de string 1 in precies vier stappen. (Het gebruiken van het axioma is één stap.)

(5 punten)

- (c) Deze opgave gaat ook over het deductief systeem van opgave 2b.

Is de string 000 afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding, zo nee, bewijs waarom niet.

(5 punten)

Opgave 3.

- (a) Geef een DEA voor de taal over $\{0, 1\}$ bestaande uit alle strings waarin de string 101 als substring voorkomt.

(5 punten)

- (b) Geef

- of een *reguliere expressie* die de taal beschrijft
- of een argument dat zo'n reguliere expressie niet bestaat

voor de volgende talen over $\{a, b\}$.

- (i) De verzameling van alle strings waarvan het aantal a 's twee meer is dan het aantal b 's.

- (ii) De verzameling van alle strings waarvan het aantal a 's even is.

(5 punten)

- (c) L_1 en L_2 zijn talen over een alfabet Σ met $L_1 \subseteq L_2$. Bewijs of weerleg: Als L_1 niet regulier is dan is L_2 niet regulier.

(5 punten)

Opgave 4. Deze opgave gaat over Turing Machines.

- (a) Geef de transitiegraaf van een Turing Machine die de eerste 0 rechts van de kop opspoort (niet op de plek waar de kop aan het begin staat, maar één of meer plekken verder naar rechts), daar de kop plaatst, en dan termineert.

(3 punten)

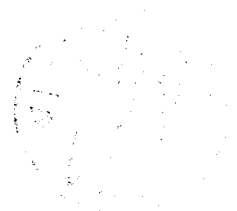
- (b) Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm $0^{2^n}1$, met n een natuurlijk getal, dus $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, herkent.

(6 punten)

- (c) We schrijven w^R voor de string w achterstevoren. Dus we hebben bijvoorbeeld $(011)^R = 110$ en $(0001)^R = 1000$.

Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm ww^R accepteert, met w een string over $\{0, 1\}$.

(6 punten)



Opgave 5.

- (a) Reken de procesterm $(a + b) \parallel (d \cdot e)$ uit tot basisprocesterm.
(De axioma's van de procesalgebra worden hieronder gegeven.)
(5 punten)
- (b) Teken de procesgraaf van de basisterm gevonden in 5a.
(5 punten)
- (c) Geef de procesgraaf van X , gedefinieerd door het stelsel

$$\begin{aligned} X &= a \cdot b \cdot X + c \cdot Y \\ Y &= (a \cdot a + b) \cdot X \end{aligned}$$

(5 punten)

De axioma's van procesalgebra

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + x &= x \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \\ x \parallel y &= x \parallel y + y \parallel x \\ a \parallel y &= a \cdot y \\ (a \cdot x) \parallel y &= a \cdot (x \parallel y) \\ (x + x') \parallel y &= x \parallel y + x' \parallel y \end{aligned}$$

Opgave 6.

- (a) Bezie de TRS $\mathcal{R}$ met regels

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow x \\ a &\rightarrow b \end{aligned}$$

- (i) Geef een reductie van de term $f(f(f(a)))$ naar normaalvorm. Geef ook de normaalvorm van de term $f(z)$.
- (ii) Heeft $\mathcal{R}$ de eigenschap van unieke normaalvormen (UN)? Motiveer uw antwoord.

(8 punten)

- (b) We willen de term $\text{tri}(0)$ de stream van alle drievouden laten genereren:

$$0 : S(S(S(0))) : S(S(S(S(S(S(0)))))) : \dots$$

Geef een reductieregel voor $\text{tri}(x)$ die dit bewerkstelligt.

(7 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

